

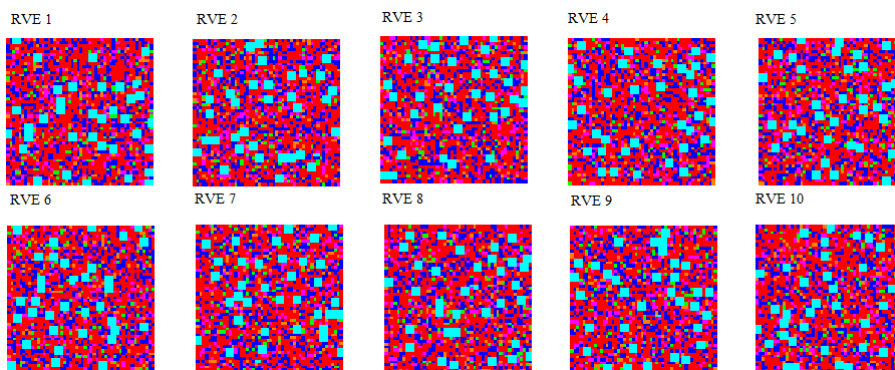
1. Beton z proszków reaktywnych: dwuskalowe modelowanie i badania doświadczalne

Ciągły i nieustający rozwój cywilizacyjny stawia przed nowoczesnymi materiałami stosowanymi w różnych dziedzinach działalności człowieka coraz to większe wymagania pod względem jakości, wytrzymałości i trwałości. Jednym z najstarszych materiałów budowlanych podlegających temu rozwojowi jest beton znany już w starożytności. Współczesne betony zgrubnie można podzielić na dwie kategorie: tradycyjne i wysokowartościowe. Jako granicę tego podziału można przyjąć wytrzymałość materiału na ściskanie równą 60 MPa. Betony z proszków reaktywnych (*ang. Reactive Powder Concrete RPC*) w skrócie BPR powstały w wyniku eliminowania wad betonów tradycyjnych i są zaliczane do grupy materiałów ultrawysokowartościowych. BPR jest materiałem stosunkowo młodym. Po raz pierwszy został użyty w 1997 r. do wybudowania kładki pieszorowerowej w miejscowości Sherbrooke w Kanadzie [1.2, 1.7]. Przykłady innych realizacji przy użyciu tego materiału można znaleźć na stronie poświęconej pierwszemu opatentowanemu betonowi z proszków reaktywnych o nazwie handlowej DUCTAL® [1.18]. Beton tego typu charakteryzuje się bardzo dobrymi właściwościami mechanicznymi i fizycznymi. Stosując odpowiednie zabiegi pielęgnacyjne i specjalnie skomponowany skład inni badacze otrzymali materiał o wytrzymałości na ściskanie w granicach 810 MPa [1.13]. Jest to wartość nieosiągalna dla wielu gatunków stali. Jeśli dodamy do tego, że BPR może osiągać dużą wytrzymałość na zginanie, jest betonem o bardzo niskiej porowatości a co za tym idzie dużej szczelności i trwałości, wyłania nam się obraz materiału budowlanego XXI wieku. BPR określane jest często mianem kompozytu cementowego lub ceramiki niskotemperaturowej [1.16]. Pomimo wielu zalet betony z proszków reaktywnych posiadają również wady. Najpoważniejszą z nich jest koszt wytworzenia takiego materiału. Niestety ciągle stosunkowo wysoki w porównaniu do betonów tradycyjnych. Jest to podstawowy czynnik hamujący upowszechnienie tego materiału na szeroko pojętym rynku materiałów budowlanych. Nie bez znaczenia jest również czynnik psychologiczny. Mamy tu na myśli fakt, iż projektanci mają obawy przed stosowaniem w odpowiedzialnych konstrukcjach materiał, który można określić, jako żelbet bez klasycznego zbrojenia, ponieważ betony BPR w odróżnieniu od betonów tradycyjnych do przenoszenia istotnych naprężeń rozciągających pochodzących od zginania elementów konstrukcyjnych nie potrzebują

klasycznego zbrojenia w postaci prętów stalowych. Do dzisiaj na całym świecie trwają intensywne badania nad betonami typu BPR, pomimo upływu 15-tu lat od pierwszego zastosowania tematyka ta nie została wyczerpana. Zdecydowana większość opracowań powstająca w tym zakresie dotyczy eksperymentalnych badań, które mają dać odpowiedzi na pytania istotne z punktu widzenia inżynierii materiałowej. Niniejsza praca jest próbą zbudowania modelu betonu z proszków reaktywnych, który może posłużyć do optymalnego projektowania składu tego materiału i analizowania konstrukcji projektowanych przy jego zastosowaniu. Czyli ma odpowiedzieć na te same pytania, co kosztowne eksperymentalne badania przy zdecydowanie mniejszym nakładzie czasu i środków finansowych.

1.1. Modelowanie mikrostruktury BPR

W wielu pracach modelowano materiały niejednorodne stosując podejście stochastyczne [1.6, 1.10, 1.14]. Do grupy takich materiałów, gdzie rozmieszczenie składników jest czysto losowe należą również betony. Materiał ten można opisać jako zbiór składników zatopionych w matrycy cementowej. Podobne podejście zastosowano w niniejszym opracowaniu, ale dotyczy ono modelowania mikrostruktury materiału. Na potrzeby zamodelowania mikrostruktury betonu BPR o składzie jak w tabeli 1.1 przyjęto dwuwymiarowy reprezentatywny element elementarny. Pomimo, iż komórka reprezentatywna jest płaska będziemy ją nazywać reprezentatywnym elementem objętościowym (*ang. Representative Volume Element, RVE*). RVE modelowana jest za pomocą metody elementów skończonych. Element jest kwadratowy i składa się z 2500 elementów skończonych, każdy o wymiarze 0,2 x 0,2 mm. Bok RVE ma długość 10 mm i składa się z 50 elementów skończonych. Na rys. 1.1 pokazano dziesięć losowo wygenerowanych komórek reprezentatywnych, z których każda pełni rolę modelu mikrostruktury BPR.

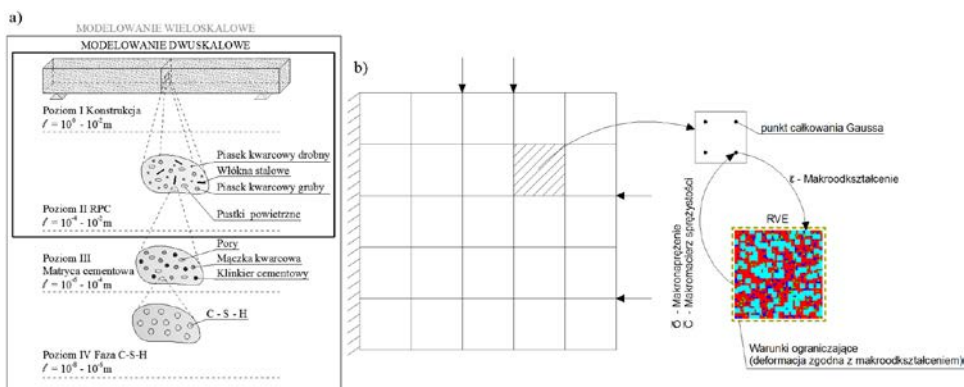


Rys. 1.1 Losowo wygenerowane RVE (Mieszanka II tabela 1.1)

Ilościowy udział poszczególnych mikrokomponentów jest dokładnym odzwierciedleniem zaprojektowanych receptur BPR (tabela 1.1). Przyjęto założenie, że w skład matrycy cementowej wchodzi: cement, pył krzemionkowy, woda oraz superplastyfikator. Na rys 1.1 kolor czerwony reprezentuje matrycę cementową, błękitny grubsze kruszywo, ciemnoniebieski drobniejsze kruszywo, różowy mikrowłókna stalowe, pomarańczowy włókna stalowe, żółty pustki powietrzne (pory). Budowanie struktury polega na losowym wybraniu elementu (z siatki 50x50) i również losowym przyporządkowaniu składnika (pory, drobne kruszywo, grubsze kruszywo, matryca cementowa, włókno stalowe) do wybranego położenia. Przyjęto podstawowy wymiar składnika 0,2 mm. Szersze omówienie modelowania mikrostruktury BPR można znaleźć w pracach [1.3, 1.4, 1.5].

1.2. Dwuskalowe modelowanie BPR

Stosowaną w niniejszej pracy metodę modelowania dwuskalowego, często nazywaną numeryczną homogenizacją (*ang. computational homogenization*) można zaszeregować do grupy metod wielkoskalowych. Metody te mają na celu opis różnych zjawisk zachodzących w ośrodkach niejednorodnych na poziomie makroskali poprzez analizowanie mikro a nawet nanostruktury takiego materiału. Szeroki przegląd dokonań ostatniej dekady w odniesieniu do modelowania betonów konstrukcyjnych można znaleźć w pracy [1.9]. Wraz ze wzrostem ilości poziomów, na których prowadzona jest analiza i które są ze sobą wzajemnie powiązane rośnie stopień skomplikowania zadania (rys. 1.2 a).



Rys. 1.2 Modelowanie dwuskalowe a) poziomy analizy, b) idea

Numeryczna homogenizacja, czyli dwuskalowe modelowanie efektywnych parametrów materiałowych w skali makro polega na tym, że zachowanie modelu betonu typu BPR w skali makro (skala punktu materialnego, poziom opisu

fenomenologicznego) opisywane jest na podstawie zjawisk zachodzących w mikrostrukturze materiału (skala mikro), (rys. 1.2 a, b). Na obu poziomach analizy do rozwiązania zadania stosowana jest klasyczna metoda elementów skończonych w wersji przemieszczeniowej. Do każdego makro – punktu całkowania Gaussa zostaje przypisany model mikrostruktury, czyli reprezentatywny element objętościowy. Po rozwiązaniu zadania brzegowego mechaniki dla RVE zostają obliczone makronapężenia i styczne macierze sprężystości, w przypadku, gdy model uwzględnia ewolucję mikrostruktury czyli brana jest pod uwagę nieliniowość geometryczna na poziomie mikro, lub uwzględnia się nieliniowość fizyczną składników mikrostruktury. Procedura pokazana schematycznie na rys. 1.2 b prowadzona jest iteracyjnie na danym kroku obciążeniowym, aż do momentu osiągnięcia stanu równowagi. Takie podejście może dać możliwość optymalnego projektowania składu betonów z proszków reaktywnych oraz możliwość uwzględnienia szeregu zjawisk zachodzących w mikrostrukturze na właściwości fizyczne i mechaniczne materiału. Na przykład wpływ mikropęknięć na wytrzymałość betonu. Nie bez znaczenia jest fakt, że metoda nie wymaga znajomości równań konstytutywnych w skali makro, związki te są wyznaczane w sposób niejawni dla każdego przyrostu obciążenia (analiza nieliniowa) na podstawie numerycznego modelu reprezentatywnego elementu objętościowego RVE. Do wyznaczenia niejawnych związków fizycznych w makroskali niezbędna jest znajomość geometrii mikrostruktury, równań konstytutywnych na poziomie skali mikro oraz ich parametrów.

1.1.1. Mikro – makro kinematyka

Opierając się na pracach [1.8, 1.11, 1.12, 1.17], w których wielkości makroskopowe zostały zdefiniowane przez wielkości mikroskopowe na potrzeby sformułowania poprawnych warunków brzegowych przemieszczenia rozwijamy w szereg Taylora ograniczony do członu pierwszego rzędu:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}^0(\mathbf{X}) + \mathbf{x} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}) + \mathbf{r}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \quad (1.1)$$

w powyższym rozwinięciu \mathbf{r} jest błędem obcięcia interpretowanym jako mikrofluktuacje pola przemieszczeń, \mathbf{X} jest wektorem wodzącym środka geometrycznego reprezentatywnego elementu objętościowego, \mathbf{x} jest wektorem wodzącym w lokalnym układzie współrzędnych RVE a kreska nad wielkościami oznacza, że są one makroskopowe. W celu określenia zależności między mikroodkształceniami a makroodkształceniami równanie (1.1) różniczkujemy względem \mathbf{x} otrzymując zależność:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \text{sym} [\nabla \mathbf{r}] \quad (1.2)$$

która zostanie spełniona w słabym sensie. Pole mikrofluktuacji \mathbf{r} musi spełniać równanie równowagi w każdym punkcie reprezentatywnego elementu objętościowego, jednocześnie na to pole nakłada się odpowiednie warunki ograniczające, o których będzie mowa w dalszej części pracy.

1.1.2. Odkształcenia

Makroodkształcenia $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ określone są jako wartości średnie z mikroodkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$, i aby taka zależność zachodziła musi być spełniony warunek zerowania się gradientu mikrofluktuacji pola przemieszczeń:

$$\int_V \nabla \mathbf{r} dV = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \otimes \mathbf{r} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{r} \otimes \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem normalnym do brzegu RVE Γ . Spełnienie powyższego warunku zapewnia, że deformacja brzegu w średnim sensie jest zgodna z zadaniem makroodkształceniem $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Równanie (1.3) nazywane jest kinematycznym warunkiem brzegowym nakładanym na pole mikrofluktuacji przemieszczeń. Ostatecznie otrzymamy:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \otimes \mathbf{u} d\Gamma \quad (1.4)$$

czyli tensor makroskopowego odkształcenia może zostać wyrażony poprzez przemieszczenia brzegu RVE.

1.1.3. Naprężenia

Makronaprężenia można zdefiniować podobnie jak makroodkształcenia, jako wartość średnią z mikronaprężeń:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV \quad (1.5)$$

Zależność tę można wyprowadzić na podstawie twierdzenia energetycznego Hilla. Chcąc wyrazić makronaprężenia przez siły brzegowe wykorzystujemy równania równowagi $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ oraz wzór na pochodną iloczynu funkcji.

$$\mathbf{x} \otimes \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \nabla(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \text{div}(\mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \quad (1.6)$$

Wykorzystując powyższą zależność i twierdzenie o dywergencji otrzymamy

$$\frac{1}{V} \int_V \operatorname{div}(\mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma}) dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \otimes \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.7)$$

W efekcie makronapężenia zostają wyrażone przez siły brzegowe

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \otimes \mathbf{t} d\Gamma = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} d\Gamma \quad (1.8)$$

Teraz pokazane zostanie, że zależność (1.8) pomiędzy makronapężeniem i średnią wartością mikronapężeń dla ciała statystycznie homogenizowalnego jest prawdziwa:

$$\frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (1.9)$$

Przez podstawienie do prawej strony równania (1.9) wariacji przemieszczeń (1.1) otrzymamy

$$\delta W = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{r} d\Gamma}_0 \quad (1.10)$$

Powyższe równanie wiąże wartość pracy mikronapężeń na wirtualnych mikroodkształceniach z pracą makronapężeń na makroodkształceniach; wynika z niego, że aby było spełnione twierdzenie Hilla ostatnia całka w (1.10) musi być równa zero. Człon ten nazywany jest statycznym warunkiem brzegowym i razem z warunkiem kinematycznym (1.3) stanowi ograniczenie nakładane na pole mikrofluktuacji przemieszczeń.

$$\delta W = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.11)$$

1.1.4. Przemieszczeniowe warunki brzegowe

Przemieszczeniowe warunki brzegowe wymuszają liniową deformację na brzegu i można je zdefiniować w następujący sposób

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{x} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (1.12)$$

Przez podstawienie (1.12) do (1.9) otrzymamy

$$\delta W = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{x} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Gamma = \left(\frac{1}{V} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \otimes \mathbf{t} d\Gamma \right) : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.13)$$

Równanie (1.12) można również zapisać w postaci

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (1.14)$$

co daje automatyczne spełnienie statycznego warunku brzegowego. Równanie to wyrażone w formie reziduum ważonych otrzyma postać.

$$\int_{\Gamma} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{x} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{t} \quad (1.15)$$

Taki sposób zapisu przemieszczeniowych warunków brzegowych jest bardzo wygodny w przypadku, gdy na poziomie mikro zadanie rozwiązywane jest metodą elementów skończonych. Po zdyskretyzowaniu zadania równanie (1.15) doprowadzi do układu n równań algebraicznych, gdzie n oznacza liczbę stopni swobody na brzegu Γ reprezentatywnego elementu objętościowego.

1.1.5. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego w mikroskali

Zadanie brzegowe mechaniki (ZBM) dla określonego RVE po dyskretyzacji rozwiązuje się poprzez minimalizację funkcji z nałożonymi dodatkowymi ograniczeniami

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \varphi(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \\ \text{z warunkami} \quad \mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{g} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.16)$$

ZBM można rozwiązać stosując metodę Lagrange'a, ale dla metody numerycznej homogenizacji mamy dużą złożoność obliczeniową dlatego podejście oparte na mnożnikach Lagrange'a jest zbyt czasochłonne. Z tego powodu wybrano alternatywne podejście [1.1, 1.8, 1.15], które sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (1.17)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_e \left[(\mathbf{C}_u^e)^T \mathbf{C}_u^e + (\mathbf{Q}_u^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{Q}_u^e \right] \quad (1.18)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \sum_e \left[\mathbf{D}_u^e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{C}_u^e)^T - (\mathbf{Q}_u^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{R}_u^e \right] \quad (1.19)$$

$$\mathbf{Q}_u^e = \mathbf{I} - \mathbf{R}_u^e \mathbf{C}_u^e \quad (1.20)$$

$$\mathbf{R}_u^e = (\mathbf{C}_u^e)^T [\mathbf{C}_u^e (\mathbf{C}_u^e)^T]^{-1} \quad (1.21)$$

Symbol \sum_e oznacza agregację po elementach skończonych e w mikroskali. Do wymuszenia deformacji RVE zgodnie z makroodkształceniem $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ zastosowano przemieszczeniowe warunki brzegowe pierwszego rodzaju [1.8, 1.11]. Korzystając z (1.15) warunki te możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{C}_u^e \mathbf{u} = \mathbf{D}_u^e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{g}_u^e \quad (1.22)$$

gdzie

$$\mathbf{C}_u^e = \int_{\Gamma} \mathbf{H}_u \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (1.23)$$

$$\mathbf{D}_u^e = \int_{\Gamma} \mathbf{H}_u \mathbf{N}^T \mathbf{X} d\Gamma \quad (1.24)$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\xi & 0 & \eta \\ 0 & 2\eta & \xi \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Wiersze macierzy będącej iloczynem $\mathbf{H}_u \mathbf{N}^T$ można interpretować jako liniowo niezależne funkcje rozkładu dopuszczalnych sił brzegowych, natomiast kolumny macierzy \mathbf{H}_u jako wartości sił węzłowych. Z uwagi na fakt, iż dla przemieszczeniowych warunków brzegowych każdy rozkład sił brzegowych jest dopuszczalny przyjęto $\mathbf{H}_u = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Równanie (1.22) wymusza deformację RVE zgodnie z zadanymi miarami makroodkształceń $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ oraz daje zerową wartość pracy dopuszczalnych rozkładów sił brzegowych na mikrofluktuacjach pola przemieszczeń.

1.1.6. Wyznaczanie parametrów materiałowych na poziomie makro

Makronapężenia $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ i macierze sprężystości $\bar{\mathbf{C}}$ dla makroskali wyznaczamy poprzez rozwiązanie trzech liniowych układów równań dla RVE [1.8]

$$\begin{aligned} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 & \text{ dla } \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [1,0,0] \\ \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2 & \text{ dla } \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [0,1,0] \\ \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^3 & \text{ dla } \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [0,0,1] \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = [\delta \bar{\sigma}^1 \quad \delta \bar{\sigma}^2 \quad \delta \bar{\sigma}^3] ; \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \delta \bar{\sigma}_{11}^1 & \delta \bar{\sigma}_{11}^2 & \delta \bar{\sigma}_{11}^3 \\ \delta \bar{\sigma}_{22}^1 & \delta \bar{\sigma}_{22}^2 & \delta \bar{\sigma}_{22}^3 \\ \delta \bar{\sigma}_{12}^1 & \delta \bar{\sigma}_{12}^2 & \delta \bar{\sigma}_{12}^3 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

gdzie

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \sum_e (\mathbf{D}_u^e)^T \lambda^e \quad (1.28)$$

$$\lambda^e = (\mathbf{R}_u^e)^T (\mathbf{F}^e - \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e) \quad (1.29)$$

$\mathbf{u}^e = \mathbf{q}$ jest wektorem mikroprzemieszczeń węzłowych RVE, $\mathbf{F}^e = \mathbf{0}$ jest wektorem mikroobciążeń węzłowych RVE.

Korzystając z (1.27) i (1.28) dla płaskiego stanu naprężenia i dla izotropowych liniowo sprężystych mikroskładników otrzymamy

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

gdzie $\bar{C}_{11} = \bar{C}_{22} \neq 0$, $\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} \neq 0$, $\bar{C}_{33} \neq 0$ oraz zakładając ma poziomie makroskali postać macierzy sprężystości materiału jak dla izotropii na podstawie rozwiązania numerycznego można wyznaczyć parametry materiałowe zhomogenizowanego ośrodka w makroskali

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} & \frac{\bar{\nu} \bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} & 0 \\ \frac{\bar{\nu} \bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} & \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie} \quad \bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})} \quad (1.31)$$

po rozwiązaniu powyższego układu trzech równań z trzema niewiadomymi $\bar{E}, \bar{\nu}, \bar{G}$ otrzymamy odpowiednio moduł Younga, współczynnik Poissona i moduł Kirchhoffa.

$$\bar{E} = \frac{\bar{C}_{11}^2 - \bar{C}_{12}^2}{\bar{C}_{11}} \quad (1.32)$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{C}_{12}}{\bar{C}_{11}} \quad (1.33)$$

$$\bar{G} = \frac{\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}}{2} = \bar{C}_{33} \quad (1.34)$$

1.3. Badania doświadczalne BPR

Tok postępowania przy projektowaniu betonów z proszków reaktywnych jest zupełnie inny niż w przypadku betonów tradycyjnych, ponieważ znane równania (Bolomeya, Abramsa itp.) służące do określenia wytrzymałości w zależności od składu tracą swoją ważność ze względu na niskie wartości wskaźnika w/s występujące w BPR. Równania konsystencji również przestają obowiązywać z powodu dużych ilości superplastyfikatorów występujących w składzie mieszanki. Jediną zależnością, która zachowuje swoją ważność jest tzw. równanie szczelności. Główną metodą stosowaną do ustalania receptur BPR jest metoda doświadczalna. W niniejszej pracy wstępnego ustalenia receptur dokonano na podstawie studiów literaturowych oraz stosując równanie szczelności odpowiednio rozszerzone stosownie do projektowanego składu betonu,

$$\frac{C}{\rho_C} + \frac{Pk}{\rho_{Pk}} + \frac{P_I}{\rho_{P_I}} + \frac{P_{II}}{\rho_{P_{II}}} + \frac{P_{III}}{\rho_{P_{III}}} + \frac{F}{\rho_F} + \frac{MF}{\rho_{MF}} + \frac{S}{\rho_S} + \frac{W}{\rho_W} = 1 \quad (1.35)$$

gdzie:

$C, Pk, P_I, P_{II}, P_{III}, F, MF, S, W$ - ilości mierzone w [kg/m³]: cementu, pyłu krzemionkowego, piasku OS – 30, piasku OS – 36, piasku OS – 38, włókien stalowych, mikrowłókien stalowych, superplastyfikatora, wody,

$\rho_C, \rho_{Pk}, \rho_{P_I}, \rho_{P_{II}}, \rho_{P_{III}}, \rho_F, \rho_{MF}, \rho_S, \rho_W$ - gęstość w [kg/m³]: cementu, pyłu krzemionkowego, piasku OS – 30, piasku OS – 36, piasku OS – 38, włókien stalowych, mikrowłókien stalowych, superplastyfikatora, wody.

Pomocniczo w celu oszacowania potrzebnej ilości cementu i pyłu krzemionkowego do uzyskania zamierzonych wytrzymałości zastosowano znane z literatury wzory empiryczne np. równanie de Larrarda. Po ustaleniu składu mieszanek przeprowadzono zaroby próbné w celu korekty zaprojektowanych receptur. Ostatecznie opracowano dwie mieszanki BPR (tabela 1.1 i 1.2). Więcej szczegółowych informacji dotyczących projektowania BPR, użytych składników,

procesu mieszania oraz wykonania i przechowywania próbek można znaleźć w pracy [1.3].

Tabela 1.1. Receptury

Składniki	Mieszanka I [kg/m ³]	Udział składnika [%]	Mieszanka II [kg/m ³]	Udział składnika [%]
Cement CEM I 42,5R	905	34,2	905	33,2
Pył krzemionkowy	230	8,7	230	8,4
Piasek kwarcowy 0,063 - 0,4 mm OS 36	702	26,6	330	12,1
Piasek kwarcowy 0,04 - 0,125 mm OS 38	285	10,8	285	10,5
Piasek kwarcowy 0,2 - 0,8 mm OS 30	---	---	335	12,3
Woda	260	9,8	260	9,5
Superplastyfikator Woerment FM 787	29,6	1,1	29,6	1,1
Mikrowłókna stalowe DM 6/0,17 KrampeHarex®	233	8,8	233	8,6
Włókna stalowe DW 38/1,0 N KrampeHarex®	---	---	117	4,3
Ciężar objętościowy	2645	---	2725	---

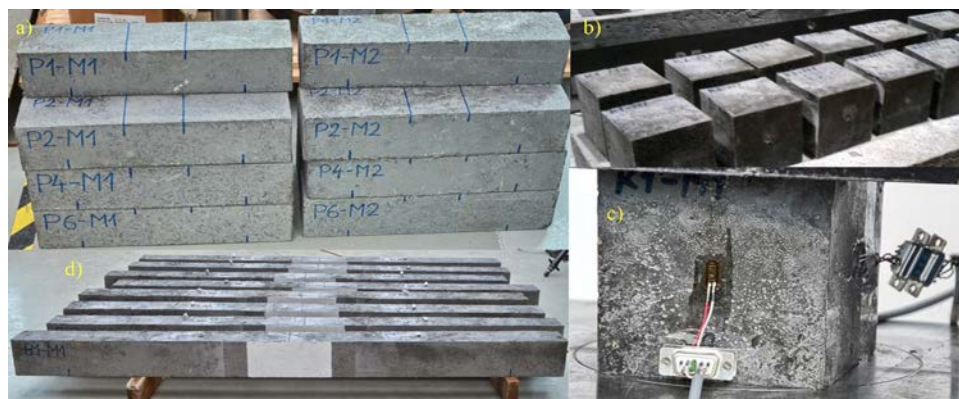
Tabela 1.2. Podstawowe parametry mieszanek

Parametr	Mieszanka I	Mieszanka II
w/c	0,29	0,29
w/s	0,23	0,23
Pk/c	0,25	0,25
Ilość superplastyfikatora w stosunku do masy cementu	3,3 %	3,3 %
Ilość superplastyfikatora w stosunku do masy spoiwa	2,6 %	2,6 %

Do badań laboratoryjnych, które dostarczyły danych do walidacji modelu teoretycznego przygotowano łącznie 32 próbki wykonane z dwóch rodzajów mieszanki (tabela 1.1). Asortyment ten składał się z trzech rodzajów próbek: belki, beleczki i kostki (rys. 1.2). Do przygotowania BPR zastosowano składniki ogólnodostępne na rynku krajowym. Jedynie mikrowłókna stalowe zostały sprowadzone na specjalne zamówienie z firmy KrampeHarex GmbH & Co. KG z Niemiec. Program badań obejmował:

1. Trzypunktowe zginanie aż do zniszczenia belek na maszynie wytrzymałościowej INSTRON 8804 o nośności ± 500 kN, pomiar deformacji w strefie zniszczenia za pomocą systemu Aramis 3D oraz

- punktowa kontrola odkształceń przy zastosowaniu tensometrów elektrooporowych w celu wyznaczenia modułu Younga.
2. Czteropunktowe badanie wytrzymałości na zginanie beleczek na maszynie wytrzymałościowej INSTRON 8804 o nośności ± 500 kN.
 3. Badanie wytrzymałości na ściskanie kostek na prasie hydraulicznej o nacisku 3000 kN z jednoczesnym pomiarem odkształceń w dwóch prostopadłych kierunkach tensometrami elektrooporowymi w celu wyznaczenia współczynnika Poissona.



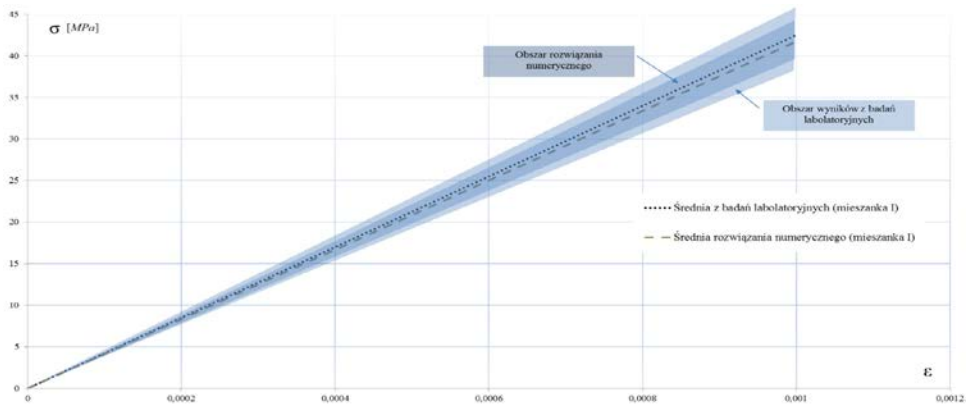
Rys. 1.2 Próbkki przygotowane do badań: a) beleczki, b, c) kostki, d) belki

Na podstawie zrealizowanych testów wyznaczono następujące parametry badanego materiału:

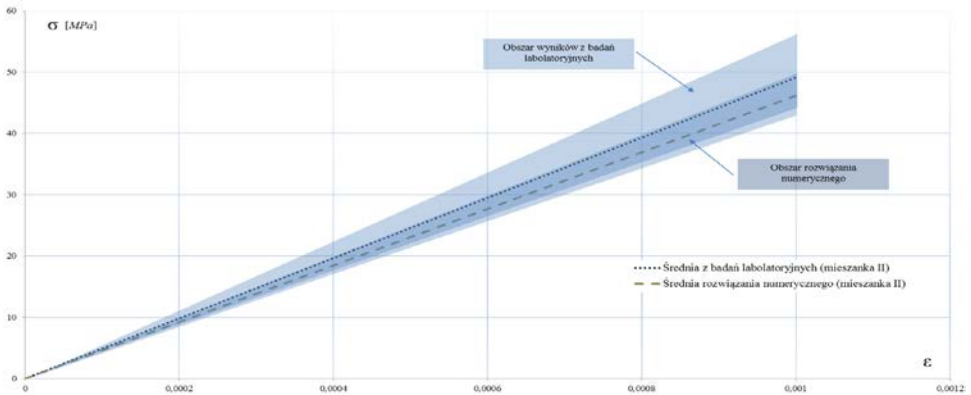
Tabela 1.3. Wyniki badań wytrzymałościowych

Parametr	Mieszanka I	Mieszanka II
Moduł Younga \bar{E} [GPa]	42,49	49,12
Współczynnik Poissona $\bar{\nu}$ [-]	0,20	0,32
Moduł Kirchhoffa \bar{G} [GPa]	17,70	18,61
Wytrzymałość na zginanie [MPa]	12,49	18,00
Wytrzymałość na ściskanie [MPa]	105,97	141,05

Na kolejnej stronie zamieszczono wynik walidacji modelu teoretycznego w postaci graficznej. Ze względu na czytelność wykresów usunięto z nich wszystkie proste odpowiadające poszczególnym próbom. Obszary, które zajmowały oznaczono odpowiednio kolorem jasnoniebieskim dla wyników otrzymanych z badań laboratoryjnych oraz ciemnoniebieskim dla rozwiązania numerycznego. Na wykresach zaznaczono również uśrednione zależności $\sigma - \epsilon$. Dokładne omówienie rezultatów badań i symulacji numerycznych można znaleźć w pracy [1.3].



Rys. 1.3 Porównanie wyników analizy dwuskalowej i otrzymanych na podstawie eksperymentu dla belek wykonanych z mieszanki I



Rys. 1.4 Porównanie wyników analizy dwuskalowej i otrzymanych na podstawie eksperymentu dla belek wykonanych z mieszanki II

Na podstawie zrealizowanych badań można stwierdzić, iż opracowany stochastyczny model betonu z proszków reaktywnych dobrze opisuje zachowanie materiału w zakresie liniowo – sprężystym i pozwala na wyznaczenie wiarygodnych wartości konstytutywnych parametrów materiałowych na poziomie makro.

1.4. Literatura

- 1.1 Ainsworth M., Essential boundary conditions and multi-point constraints in finite element analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190, 6323 - 6339

- 1.2 Blais P. Y., Couture M., Prestressed Pedestrian Bridge – World’s First Reactive Powder Concrete Structure, PCI Jurnal, 1999
- 1.3 Denisiewicz A., Modelowanie dwuskalowe związków konstytutywnych betonu z proszków reaktywnych i ich walidacja doświadczalna, Praca doktorska, Uniwersytet Zielonogórski, 2013
- 1.4 Denisiewicz A., Kuczma M., Two-scale modeling of reactive powder concrete by the method of numerical homogenization, 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (full paper) ECCOMAS 2012, Vienna, Austria, 2012
- 1.5 Denisiewicz A., Kuczma M., Two-scale modelling of reactive powder concrete. Part I: representative volume element and solution of the corresponding boundary value problem, Civil and Environmental Engineering Reports, 2013, No. 10, 41-61
- 1.6 Fishman L., McCoy J. J., A unified view of bulk property theories for stochastic and periodic media, Journal of Applied Mathematics and Physics, 1981, 32, 45-61
- 1.7 Jasiczak J., Wdowska A., Rudnicki T., Betony ultrawysokowar-tościowe. Właściwości, technologie, zastosowania, Stowarzyszenie Producentów Cementu, Kraków, 2008
- 1.8 Kaczmarczyk Ł., Parce CH. J., Bićanić N., Scale transition and enforcement of RVE boundary conditions in second-order computational homogenization, Int. J. Numer. Meth. Engng, 2008, 74, 506–522
- 1.9 Maekawa K., Ishida T., Kishi T., Multi-scale Modeling of Structural Concrete, Taylor & Francis, 2009
- 1.10 McCoy J. J., Macroscopic response of continua with random microstructures, Mechanics today, 1981, 6
- 1.11 Miehe C., Computational micro-to-macro transitions for discretized microstructures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192, 559-591
- 1.12 Nemat – Nasser S., Hori M., Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials., Elsevier, 1999
- 1.13 Richard P., Cheyrezy M., Composition of Reactive Powder Concretes, Cement and Concrete Research, 1995, 25, 1501-1511
- 1.14 Schröder J., Balzani D., Brands D., Approximation of random microstructures by periodic statistically similar representative volume elements based on lineal-path functions, Archive of Applied Mechanics, 2011, 81, 975–997
- 1.15 Strang G., Introduction to applied mathematics, Wellesley-Cambridge Press, 1986
- 1.16 Zdeb T., Śliwiński J., Beton z proszków reaktywnych – właściwości mechaniczne i mikrostruktura, Budownictwo Technologie Architektura, 2010, 51, 51-55
- 1.17 Zohdi T. I., Wriggers P., An Introduction to Computational Micromechanics, Springer, 2008
- 1.18 <http://www.ductal-lafarge.com/>