

**AiR**  
**Lista nr 3**

**Zad 1.** Sprawdzić istnienie granicy funkcji obliczając granice jednostronne:

a)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x=1$ ; b)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ ,  $x=2$ ; c)  $f(x) = \frac{3}{9-x^2}$ ,  $x=-3$ ;  
d)  $f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}}$ ,  $x=2$ ; e)  $f(x) = 3^{\frac{1}{(2-x)^2}}$ ,  $x=2$ ; f)  $f(x) = \frac{e^x-1}{\frac{1}{e^x+1}}$ ,  $x=0$ .

**Zad 2.** Obliczyć granice:

1)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$ ;  
6)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^5 + 32}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x + 3}}$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{\sqrt[3]{x^6 + 1}}$ ;  
10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x - x}}$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{5}{x} \right)^x$ ; 12)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{4}{x} \right)^{x+2}$ ; 13)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left( 1 + \frac{4}{x} \right)}$ ; 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$ ;  
15)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x - 2}{3x + 2} \right)^{2x}$ ; 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ ; 17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$ ; 18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$ ; 19)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$ ; 20)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ ;  
21)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x)$ ; 22)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$ ; 23)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$ ; 24)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}}$ ; 25)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}}$ ;

**Zad 3.** Czy funkcje są ciągłe w przedziale  $\langle 0, 2 \rangle$ ?

1)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ; 2)  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ;

**Zad 4.** Zbadać ciągłość funkcji oraz naszkicować jej wykres. Jeżeli funkcja jest nieciągła, to określić rodzaj nieciągłości:

1)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  w punkcie  $x_0 = 1$ ; 2)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$  w punkcie  $x_0 = 0$ ; 3)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \neq 0 \\ 2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ ;  
4)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ ; 5)  $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ ; 6)  $f(x) = \begin{cases} -\log_{\frac{1}{2}}(x+3) & \text{dla } -3 < x \leq -2 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } -2 < x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ ;

**Zad 5.** Dla jakich wartości A i B funkcja

1)  $f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{dla } x < -\frac{\pi}{2} \\ A \sin x + B & \text{dla } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$ ; 2)  $f(x) = \begin{cases} A(2 + e^{\frac{1}{x}}) & \text{dla } x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + e^{\frac{1}{x}}) & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\sin Bx}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

jest ciągła w zbiorze  $\mathbb{R}$ ?

**Zad 6.** Uzasadnić, że podane równania mają rozwiązania we wskazanych przedziałach:

1)  $e^x = \frac{1}{x}$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ; 2)  $1 = \frac{\sin x}{2} + x$ ,  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ; 3)  $\ln x + 2x = 1$ ,  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

**Zad 7.** Czy funkcja  $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \sin \pi x + 3$  przybiera wartość  $\frac{7}{3}$  wewnątrz przedziału  $\langle -2, 2 \rangle$ ?

**Zad 8.** Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji wykazać, że nie istnieją granice funkcji:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x+1}}$ .

**Zad 9.** Czy można dobrać stałą A tak, aby funkcja f określona wzorem  $f(x) = \begin{cases} e^{-x+|x|}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$  była ciągła w zerze?