

AiR
Lista nr 4

Zad 1. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

1) $y = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$; 2) $y = x^2 + |x^2 - 4|$ w punkcie $x_0 = 2$;

3) $y = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dla } x \geq 1 \\ 3x^3 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$; 4) $y = \begin{cases} x \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$;

Zad 2. Korzystając z reguł obliczania pochodnych obliczyć pochodne następujących funkcji:

1) $y = 5x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$; 2) $y = x + 3e^x + 2 \ln x$; 3) $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x^2}$; 4) $y = \sin x + \cos x$;

5) $y = 2 \arctg x - \operatorname{arcctg} x + \arccos x$; 6) $y = \frac{3x^2 - 4x}{4x^2 + 3}$; 7) $y = \frac{x + e^x}{2x^2 + 1}$; 8) $y = xe^x$; 9) $y = 10x^3 \ln x$;

10) $y = \cos(2x + 1)$; 11) $y = \sin^2 x$; 12) $y = e^{4x^5 + 7}$; 13) $y = (1 + \sqrt[4]{x}) \operatorname{tg}(3x)$; 14) $y = \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$;

15) $y = x \sin(2^x)$; 16) $y = 2^{3^x}$; 17) $y = e^{x^2} \ln x$; 18) $y = \sin(\cos \frac{1}{x})$; 19) $y = \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}$;

20) $y = [\log_3(x^2 - 1)]^2$; 21) $y = \sqrt[3]{\arctg \frac{x+3}{4}}$; 22) $y = x^x$; 23) $y = (\sin x)^x$;

Wskazówka do 22) 23) zastosować wzory: $e^{\ln x} = x$; $e^{\ln g(x)} = g(x)$.

Zad 3. Obliczyć pochodne rzędu od pierwszego do piątego funkcji: $y = -4x^4 + 7x^2 + 12x + 6$.

Zad 4. Obliczyć drugą pochodną funkcji: 1) $y = 3x^3$; 2) $y = \arccos x$; 3) $y = xe^{\sin x}$.

Zad 5. Zbadać różniczkowalność następujących funkcji:

1) $y = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{dla } x < 1 \\ x^3 - 4x + 6 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$; 2) $y = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0 \\ \ln(x+1) & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$;

Zad 6. Niech $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x < 0 \\ Ax^2 + Bx & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$.

Dobrać A i B tak, aby funkcja f była wszędzie różniczkowalna.

Zad 7. Wyznaczyć różniczki funkcji:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; 2) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; 3) $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Zad 9. Obliczyć przybliżoną wartość następujących wyrażeń:

1) $\sqrt[4]{16,64}$; 2) $\sqrt{8,76}$; 3) $(2,01)^2$; 4) $\arctg(0,98)$; 5) $\sin 29^\circ$.

Zad 10. Napisać równanie stycznej i normalnej do krzywej:

1) $y = x^2 - 4x + 7$, $x_0 = 1$; 2) $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$, $x_0 = 2a$.

Zad 11. Zbadać monotoniczność następujących funkcji:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; 2) $y = x^4 - 2x^2 - 5$; 3) $y = \sqrt{2x - x^2}$; 4) $y = x^2 e^{-x}$.

$$5) y = \frac{1}{x^2} + x^2; \quad 6) y = x + \frac{4}{x}; \quad 7) y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Zad 12. Wyznaczyć ekstrema funkcji:

$$1) y = x^3 - 6x^2 - 9x - 4; \quad 2) y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}; \quad 3) y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad 4) y = x^2 \ln x.$$

Zad 13. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji:

$$1) y = x - 2 \ln x \quad w \quad x \in \langle 1, e \rangle; \quad 2) y = x^4 - 2x^2 + 5 \quad w \quad x \in \langle -2, 2 \rangle; \quad 3) y = \arctg x^2 \quad w \quad R.$$

Zad 14. Wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

$$1) y = \frac{1+x}{1+x^2}; \quad 2) y = \ln(x^2 + 1); \quad 3) y = x \ln \frac{1}{x};$$

Zad 15. Wyznaczyć asymptoty wykresów: 1) $y = \frac{3-x^2}{2-x}$; 2) $y = \frac{2x^2-1}{x^2}$; 3) $y = x \arctg x$.

Zad 16. Sprawdzić, czy poniższe funkcje spełniają w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ warunki twierdzenia Rolle'a:

$$1) f(x) = -x^2 + 1; \quad 2) f(x) = 1 - |x|.$$

Zad 17. Czy funkcja $f(x) = 3x^2 - 5$ spełnia w przedziale $\langle -2, 0 \rangle$ warunki twierdzenia

Lagrange'a? Jeśli tak, to wyznaczyć punkt c taki, że $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ dla $c \in (a, b)$.

Zad 18. Wielomian $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2$ przedstawić w postaci sumy potęg dwumianu $x-1$.

Zad 19. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granice:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{a^x + e^{-x} - 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{1 - e^x}}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(x - \frac{\pi}{2})}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \cdot \ln(1-x);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctg x) \cdot \ln x; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}); \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x^2}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$$