

Lista nr 3

Zad. 1 Korzystając z podstawowych własności całek nieoznaczonych oraz podstawowych wzorów rachunku całkowego wyznaczyć następujące całki:

$$\begin{aligned} & 1) \int (6x^2 - 2x^{\frac{2}{3}} + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}) dx; \quad 2) \int \frac{x^2 - \sqrt{x^5} + 4\sqrt[4]{2x^3}}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad 3) \int \frac{x^3 + 8}{x+2} dx; \quad 4) \int \frac{(x^2 - 1)^3}{x^2} dx; \\ & 5) \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \quad 6) \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx; \quad 7) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx; \quad 8) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx; \quad 9) \int 2^x e^x dx; \quad 10) \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx; \\ & 11) \int \frac{x+8}{x-3} dx; \quad 12) \int (3x^2 - \sqrt{x^5})^3 dx; \quad 13) \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx; \quad 14) \int \frac{(1-x^2)^3}{x\sqrt{x}} dx; \quad 15) \int \frac{2\sin^2 x + 1}{\cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

Zad. 2 Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie wyznaczyć całki:

$$\begin{aligned} & 1) \int \frac{x dx}{(x^2 + 3)^6}; \quad 2) \int e^{-3x} dx; \quad 3) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx; \quad 4) \int x e^{-x^2} dx; \quad 5) \int \sin(2x - 3) dx; \quad 6) \int \operatorname{tg} x dx; \\ & 7) \int \frac{e^{3x}}{1 + e^{6x}} dx; \quad 8) \int x \sqrt{x^2 + 1} dx; \quad 9) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}; \quad 10) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad 11) \int \frac{\sqrt{2\operatorname{arctg} x - 2}}{1 + x^2} dx; \\ & 12) \int \frac{dx}{2x+1}; \quad 13) \int \frac{x-8}{x+4} dx; \quad 14) \int \sqrt{7-2x} dx; \quad 15) \int \frac{x^3}{1+x^8} dx; \quad 16) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}; \quad 17) \int \frac{dx}{2x^2 + 9}. \end{aligned}$$

Zad. 3 Uzasadnić prawdziwość następujących wzorów (dla $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} & 1) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C; \\ & 2) \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C; \\ & 3) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C; \\ & 4) \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C; \\ & 5) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C; \\ & 6) \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C. \end{aligned}$$

Zad. 4 Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części wyznaczyć:

$$\begin{aligned} & 1) \int x e^x dx; \quad 2) \int x^2 e^{3x} dx; \quad 3) \int x \cos x dx; \quad 4) \int x^2 \sin(4x) dx; \\ & 5) \int \operatorname{arctg} x dx; \quad 6) \int e^x \cos x dx; \quad 7) \int x e^{x^2} (x^2 + 1) dx; \quad 8) \int \frac{\sin \ln x}{x^2} dx; \\ & 9) \int x \ln x dx; \quad 10) \int x^3 \ln x dx; \quad 11) \int \ln x dx; \quad 12) \int (\ln x)^2 dx \end{aligned}$$