

## Analiza matematyczna 1

### Lista 1

Z.1. Wykaż uwagę 1.1. (3p.)

Z.2. Wykaż uwagę 1.2. (3p.)

Z.3. Wykaż uwagę 1.3. (3p.)

Z.4. Wykaż uwagę 1.4. (3p.)

Z.5. Sprawdź, że  $x \cdot 0 = 0$  dla każdego  $x \in R$ . (3p.)

Z.6. Wykaż, że  $-1 \cdot x = -x$  dla każdego  $x \in R$ . (3p.)

Z.7. Sprawdź, czy suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb niewymiernych musi być liczbą niewymierną. (3p.)

Z.8. Sprawdź, czy następujące liczby są wymierne czy niewymierne: (6p.)

a)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$ ,

b)  $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ ,

c)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2} + 3}} - \frac{\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2} - 3}$ .

Z.9. Wykaż, że  $\sqrt{2}$  jest liczbą niewymierną. (3p.)

Z.10. Wykaż, że jeżeli  $r$  jest liczbą wymierną różną od zera, a  $x$  liczbą niewymierną, to liczby  $r+x$  oraz  $rx$  są niewymierne. (3p.)

Z.11. Zbadaj ograniczoność oraz wyznacz kresy zbiorów: (8p.)

$$A = \{x \in R : |2x + 3| + |x + 3| - x < 6\},$$

$$B = \{x \in R : |x^3 - 1| < x^2 + x + 1\},$$

$$C = \{x \in R : \log_2 |x + 2| < 3\},$$

$$D = \{x \in R : ||x - 1| - 1| < 1\}.$$

Z.12. Wyznacz kresy zbioru  $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in N\right\}$ . (3p.)

Z.13. Wyznacz kresy zbioru  $A = \left\{ 1 + \frac{1}{2^n} : n \in N \right\}$ . (3p.)

Z.14. Wyznacz kresy zbiorów : (8p.)

$$A = \left\{ \frac{x}{x^2 + 1} : x \in R \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{x}{|x| + 1} : x \in R \right\}.$$

Z.15. Wykonaj działania na liczbach zespolonych: (6p.)

a)  $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$ ,

b)  $(\sqrt{2} + i)(3 - \sqrt{3}i)$ ,

c)  $\frac{2 - 3i}{5 + 4i}$ ,

d)  $(3 + 4i)i$ ,

e)  $(1 + i)^2$ ,

f)  $\frac{i}{(1 + i)^2}$ .

Z.16. Znajdź część rzeczywistą i urojoną liczb: (6p.)

a)  $z = \frac{2 - i}{1 + i}$ ,

b)  $z = \frac{(1 - i)^2 - i}{(1 + i)^2 + i}$ ,

c)  $z = \frac{(\sqrt{3} + i)(-1 - i\sqrt{3})}{1 - i}$ .

Z.17. Rozwiąż równania w zbiorze liczb zespolonych: (6p.)

a)  $x^2 + 1 = 0$ ,

b)  $z^2 + 2iz + 3 = 0$ .

Z.18. Wykaż, że dla wszystkich  $z_1, z_2 \in C$  : (8p.)

a)  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ,

b)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ,

c)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,

d)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

Z.19. Podaj interpretację geometryczną liczby zespolonej, jej modułu i argumentu głównego. (4p.)

Z.20. Znajdź na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów, spełniających warunki: (12p.)

a)  $|z| = 2$    b)  $1 \leq |z| \leq 3$    c)  $|z - i| \leq \frac{1}{2}$    d)  $\left| \frac{z-1}{z+i} \right| = 1$    e)  $|z - i| \leq 1$    g)  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ .

Z.21. Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczby zespolone: (4p.)

$$1 - i\sqrt{3}, \quad -1 - i, \quad 1 - i, \quad \sqrt{3} + i.$$

Z.22. Oblicz : (6p)

a)  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2,$

b)  $(-1 + i)^8,$

c)  $(-\sqrt{3} + i)^6.$

Z.23. Wyznacz pierwiastki : (8p.)

$$\sqrt[4]{16}, \sqrt[3]{1+i}, \sqrt[4]{-i}, \sqrt[6]{1}.$$