Analiza matematyczna 1

Lista 3

Z.1. Wyznacz ciąg sum częściowych dla podanych niżej szeregów oraz zbadać ich zbieżność: (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{2}{5^{n+1}}\right)$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Z.2.Wykorzystując warunek konieczny zbieżności szeregu wykaż, że następujące szeregi są rozbieżne. (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{20}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}11\cdot 2^n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100}(-1)^n$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Z.3. Stosując kryterium porównawcze zbadaj zbieżność następujących szeregów. (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3-1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+3}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$, i) $\sum_{n=1}^{\infty}tg^2\frac{1}{n}$,

j) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n})$.

Z.4. Stosując kryterium Cauchy'ego rozstrzygnij, które poniższe szeregi są zbieżne. (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^7}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{6^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}99^n}{100^n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}$.

Z.5. Stosując kryterium d'Alemberta zbadaj zbieżność następujących szeregów. (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{((2n)!)^2}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^4}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2\cdot 3^n}{(2n)!}$.

Z.6. Zbadaj zbieżność następujących szeregów naprzemiennych. (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n})^n$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Z.7. Rozstrzygnij, które z podanych niżej szeregów są zbieżne warunkowo, a które bezwzględnie. (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n})^n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Z.8. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$. (3 p.)

Z.9. Wykaż, że $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$. (3 p.) Uwaga : Przyjmujemy umowę, że $0^0=1$.

Z.10. Niech $q\in(-1,1)$. Wykaż, że $\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$. (3 p.)

Z.11. Dla dowolnych liczb $w,z\in C$ uzasadnij zbieżność iloczynu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ i znajdź jego sumę.

Uwaga : Przyjmujemy umowę, że $0^0=1$. (3 p.)