Analiza matematyczna 2
Lista nr 1

Zad 1. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

1) $y=|x|$ *w punkcie* $x_0=0$; 2) $y=x^2+|x^2-4|$ *w punkcie* $x_0=2$;

3) $y=\begin{cases} x^2+x+1 & dla\ x\geq 1 \\ 3x^3 & dla\ x<1 \end{cases}$; 4) $y=\begin{cases} xarctg\,\frac{1}{x} & dla\ x\neq 0 \\ 0 & dla\ x=0 \end{cases}$;

Zad. 2. Korzystając z definicji pochodnej obliczyć pochodną funkcji:

1) $f(x)=x^2$, 2) $f(x)=\sin x$, 3) $f(x)=\sqrt{x}$,4) $f(x)=x^3$, 5) $f(x)=\sqrt{x+1}$

Zad 3. Korzystając z reguł obliczania pochodnych obliczyć pochodne następujących funkcji:

1) $y=5x^3-2x^2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$; 2) $y=x+3e^x+2\ln x$; 3) $y=2\sqrt[5]{x}+\frac{5}{x^2}$; 4) $y=\sin x+\cos x$;

5) $y=2arctgx-arcctgx+\arccos x$; 6) $y=\frac{3x^2-4x}{4x^2+3}$; 7) $y=\frac{x+e^x}{2x^2+1}$; 8) $y=xe^x$; 9) $y=10x^3\ln x$;

10) $y=\cos(2x+1)$; 11) $y=\sin^2 x$; 12) $y=e^{4x^5+7}$; 13) $y=(1+\sqrt[4]{x})tg(3x)$; 14) $y=\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$;

15) $y=x\sin(2^x)$; 16) $y=2^{3^x}$; 17) $y=e^{x^2}\ln x$; 18) $y=\sin(\cos\frac{1}{x})$; 19) $y=\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}$;

20) $y=\left[\log_3(x^2-1)\right]^2$; 21) $y=\sqrt[3]{arctg\,\frac{x+3}{4}}$; 22) $y=x^x$; 23) $y=(\sin x)^x$;

Wskazówka do 22) 23) zastosować wzory : $e^{\ln x}=x$; $e^{\ln g(x)}=g(x)$.

Zad 4. Zbadać różniczkowalność następujących funkcji:

1) $y=\begin{cases} x^2+3x-1 & dla\ x<1 \\ x^3-4x+6 & dla\ x\geq 1 \end{cases}$; 2) $y=\begin{cases} x & dla\ x<0 \\ \ln(x+1) & dla\ x\geq 0 \end{cases}$;

Zad 5. Niech $f(x)=\begin{cases} \sin x & dla\ x<0 \\ Ax^2+Bx & dla\ x\geq 0 \end{cases}$.

Dobrać A i B tak, aby funkcja f była wszędzie różniczkowalna.

Zad 6. Napisać równanie stycznej i normalnej do krzywej:

1) $y=x^2-4x+7$, $x_0=1$; 2) $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$, $x_0=2a$.

Zad 7. Sprawdzić, czy poniższe funkcje spełniają w przedziale <-1,1> warunki twierdzenia Rolle'a:

1) $f(x)=-x^2+1$; 2) $f(x)=1-|x|$.

Zad 8. Czy funkcja $f(x)=3x^2-5$ spełnia w przedziale <-2,0> warunki twierdzenia Lagrange'a? Jeśli tak, to wyznaczyć punkt c taki, że $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ dla $c\in(a,b)$.