Analiza matematyczna 1

Lista 4

Z.1. Wykaż, na podstawie definicji Heinego , że:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)=0$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x)=0$, c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{3}{5}$,

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}=27$, e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

Z.2. Uzasadnij, że podane granice nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x^2$.

Z.3. Zbadaj istnienie i obliczyć wartość ewentualnej granicy:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+3x^2-4}{x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$, c) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3-\sqrt{x+1}}{4-\sqrt{2x}}$,

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-\sqrt[3]{2x}}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$, i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}$,

j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$, k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$, l) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}$, o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$, r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Z.4. Oblicz granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach i rozstrzygnij, czy funkcje te mają w tych punktach granice:

a) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie x = 0, b) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}+x$ w punkcie x = 1,

c) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ w punkcie x = 2, d) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ w punkcie x = 0.

Z.5. Zbadaj ciągłość funkcji $f : R \to R$ określonych następującymi wzorami :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & dla\ \ 0 \le x \le 1 \\ 2 - x^2 & dla\ \ 1 < x \le 2 \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & dla\ \ |x| \le 1 \\ |x-1| & dla\ \ |x| > 1 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & dla\ \ x \ne 0 \\ 0 & dla\ \ x = 0 \end{cases}$,

d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & dla\ \ x \ne 0 \\ 0 & dla\ \ x = 0 \end{cases}$,

e) $f(x) = \begin{cases} -1 & dla\ \ x < 0 \\ 0 & dla\ \ x = 0 \\ 1 & dla\ \ x > 0 \end{cases}$,

f) $f(x) = [x]$.

Z.6. Uzasadnij, że funkcja $f : R \to R$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & dla\ \ x\ \ niewymiernych \\ 0 & dla\ \ x\ \ wymiernych \end{cases}$$

jest nieciągła w każdym punkcie $x \in R$.

Z.7. Uzasadnij, że funkcja $f : R \to R$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla\ \ x\ \ niewymiernych \\ x & dla\ \ x\ \ wymiernych \end{cases}$$

jest ciągła tylko w punkcie $x = 0$.

Z.8. Mówimy, że funkcja $f : I \to R$ (I jest przedziałem, a nawet dowolnym podzbiorem zbioru *R*) spełnia na I *warunek Lipschitza* ze stałą $L \ge 0$, jeżeli

$$| f(x) - f(y) | \le L \, | x - y | \quad dla \quad x, y \in I .$$

Pokazać, że funkcja f spełniająca warunek Lipschitza na I jest jednostajnie ciągła na I .