Biznes Elektroniczny
Lista nr 1 – Analiza matematyczna

Zad 1. Wypisać kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n), którego wyraz ogólny określony jest wzorem:

$$a)\ a_n = \frac{1}{n};\quad b)\ a_n = \frac{n+1}{n};\quad c)\ a_n = (-2)^n;\quad d)\ a_n = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n;\quad e)\ a_n = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zad 2. Na podstawie znajomości kilku początkowych wyrazów podanych ciągów znaleźć wzory ogólne tych ciągów:

a) (a_n)=(1,4,9,16,25,36,...); b) (a_n)=$\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},...\right)$; c) ($a_n$)=$\left(1,-\frac{1}{3},\frac{1}{5},-\frac{1}{7},\frac{1}{9},...\right)$;

d) (a_n)=(0,2,0,2,0,2,...); e) (a_n)=(2,1,0,-1,-2,-3,...); f) (a_n)=(-1,1,3,5,7,9,...).

Zad 3. Zbadać monotoniczność następujących ciągów o wyrazie ogólnym:

$$a) a_n = n^2;\quad b)\ a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)};\quad c)\ a_n = \sqrt[n]{2}-1;\quad d)\ a_n = \frac{n^2+1}{n!};\quad e)\ a_n = 2^n;\quad f)\ a_n = \ln n;\quad g) a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

Zad 4. Zbadać czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

$$a)\ a_n = \frac{1}{n};\quad b)\ a_n = \frac{3^n}{3^n+2};\quad c)\ a_n = \sqrt{n+2};\quad d)\ a_n = \ln n;\quad e)\ a_n = 2-\frac{1}{n};\quad f)\ a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Zad 5. Oblicz granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \frac{n}{n+1};\quad b)\ a_n = \frac{4n-3}{6-5n};\quad c)\ a_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3};\quad d)\ a_n = \frac{4n^3-n+6}{2n^3-n^2+2n+1};$$

$$e)\ a_n = \frac{n^2-1}{3-n^3};\quad f)\ a_n = \frac{n+1}{n^2+n+1};\quad g)\ a_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^2;\quad h)\ a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)};$$

$$i)\ a_n = \frac{3}{n}-\frac{10}{\sqrt{n}};\quad j)\ a_n = \sqrt{\frac{3n-2}{n+10}};\quad k)\ a_n = \frac{\left(\sqrt{n}+3\right)^2}{n+1};\quad l)\ a_n = \frac{n^4-5n^2+n-1}{n^2+1}.$$

Zad 6. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \sqrt{n^2+n}-n;\quad b)\ a_n = \sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3};\quad c)\ a_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1};\quad d)\ a_n = \frac{1+3+...+(2n-1)}{2+4+...+2n};$$

$$d)\ a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+5}};\quad e)\ a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2}-n;\quad f)\ a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}}.$$

Zad 7. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n};\quad b)\ a_n = \frac{4\cdot 3^{2n}-7}{5\cdot 9^n+2};\quad c)\ a_n = \frac{2^{n+1}-3^{n-2}}{3^{n+2}}.$$

Zad 8. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n = \sqrt[n]{5^n+4^n+3^n};\quad b)\ a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n};\quad c)\ a_n = \frac{\sin^2 n+4n}{3n-1};\quad d)\ a_n = \sqrt[n]{2n^4+n^2+1};$$

$$e)\ a_n = \sqrt[n]{14n^2-2n+6};\quad f)\ a_n = \sqrt[n]{2^n+\pi^n+e^n};\quad g)\ a_n = \sqrt[n]{5^n+\cos^2 n+3^n};\quad h)\ a_n = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Zad 9. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n;\quad b)\ a_n=\left(\frac{n+5}{n}\right)^n;\quad c)\ a_n=\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3};\quad d)\ a_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n;\quad e)\ a_n=\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2};$$

$$f)\ a_n=\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{6n};\quad g)\ a_n=\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n};\quad h)\ a_n=\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n}.$$

Zad 10. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a)\ a_n=\frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)};\quad b)\ a_n=\frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}};\quad c)\ a_n=\frac{\log_2 n^5}{\log_8 n};\quad d)\quad a_n=\frac{1+2+3+...+n}{n^2};\ e)\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Zad. 11. Korzystając z tego, że szereg harmoniczny rzędu r: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ jest zbieżny dla $r > 1$ i rozbieżny dla $r \le 1$ oraz stosując kryterium porównawcze orzec, czy dany szereg jest zbieżny:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+3}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{n^2-3}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2-2}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n+2}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sin^2 n}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n^3-n^2}}$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$, j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$, k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$,

Zad. 12. Zbadać, czy poniższy szereg jest zbieżny:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-0{,}01\right)^n$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}\cdot 2^n}{(n+1)^n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!\cdot 5^n}{n^{4n}}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{(n^2)}}$, i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}$, j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^n\cdot 10^n}$,

k) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$, l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^7+1}}$, m) $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$,