

## Całka oznaczona i jej zastosowania. Całka niewłaściwa.

**Zad. 1** Obliczyć całki oznaczone:

$$1) \int_{-1}^1 x^3 dx; \quad 2) \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}; \quad 3) \int_3^5 \frac{xdx}{x^2+5}; \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx; \quad 5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5x \cos x dx; \quad 6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx.$$

**Zad. 2** Obliczyć całki niewłaściwe:

$$1) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 2) \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}; \quad 3) \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2-4}; \quad 4) \int_1^{+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx; \quad 5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+1}; \quad 6) \int_{-\infty}^0 e^{2+4x} dx.$$

**Zad. 3** Wyznaczyć wartość średnią funkcji we wskazanym przedziale:

$$1) f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{w } <0, 2>; \quad 2) f(x) = \sin^3 x \quad \text{w } <0, \pi>; \quad 3) f(x) = \cos x \quad \text{w } <-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}>.$$

**Zad. 4** Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego krzywymi:

$$1) y = 3x^2 - 4x, \quad x = -1, \quad x = 1 \quad \text{i osi\u0105 } Ox; \quad 2) y = \sin x, \quad y = \cos 2x \quad \text{i osi\u0105 } Oy (x \geq 0); \\ 3) y = x^2 - x - 6, \quad y = -x^2 + 5x + 14; \quad 4) y = x^3, \quad y^2 = x; \quad 5) xy = 4, \quad x + y = 5.$$

**Zad. 5** Obliczyć długość łuku krzywych danymi równaniami:

$$1) x^2 + y^2 = r^2; \quad 2) 9y^2 = 4x^3, \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 3) y = 2\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 4) y = \ln x, \quad x \in <\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}>.$$

**Zad. 6** Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi  $Ox$  obszaru ograniczonego krzywymi:

$$1) y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 2) x^2 - y^2 = 9, \quad 3 \leq x \leq 3\sqrt{2}; \quad 3) y = 1 - x^2, \quad y = x^2 + 2, \quad x = -1, \quad x = 1; \\ 4) y = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \quad 5) \text{kuli o promieniu } R.$$

**Zad. 7** Dla jakich  $x$  funkcja  $h(t) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$  osiąga ekstremum?