Całki wielokrotne

Zad. 1 Wyznaczyć granice całkowania gdy obszar D jest:

a) ograniczony krzywą $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$,

b) trójkątem o wierzchołkach $O(0,0)$, $A(2,1)$ $B(-2,1)$,

c) określony nierównościami: $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

Zad. 2 Zmienić kolejność całkowania:

a) $\int\limits_0^2 [\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy]dx$,

b) $\int\limits_{-6}^2 [\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy]dx$,

c) $\int\limits_0^r [\int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)dy]dx$.

Zad. 3 Obliczyć całki:

a) $\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dx\right]dy$;

b) $\int\limits_1^2 \left[\int\limits_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}dx\right]dy$;

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [\int\limits_0^2 x^2 y\cos(xy^2)dy]dx$;

d) $\int\limits_0^1 [\int\limits_0^1 x^2 ye^{xy}dy]dx$;

e) $\int\limits_1^2 \left[\int\limits_{x^3}^x e^{\frac{y}{x}}dy\right]dx$;

f) $\int\limits_1^e \left[\int\limits_0^x \ln xdy\right]dx$;

g) $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$,

h) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, $D: \begin{cases} y = x \\ x = 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$,

i) $\iint\limits_D e^x y dxdy$, $D: \begin{cases} y \geq 0, \quad x \geq 0 \\ y \leq x, \quad x \leq 1 \end{cases}$,

j) $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, $D: \begin{cases} y = x \\ x = 0 \\ y = \pi \end{cases}$,

k) $\iint\limits_D (x+6y)dxdy$, $D: \begin{cases} y = x \\ x = 1 \\ y = 5x \end{cases}$,

l) $\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy$, $D: \begin{cases} x = 1, \quad x = 9 \\ y = 0, \quad y = x \end{cases}$,

m) $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, D jest trójkątem o wierzchołkach

$O(0,0),\ A(3,1)\ B(-2,1)$,

n) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2} dxdy$, D jest trójkątem o wierzchołkach $A(-1,0), B(-1,2), C(1,0)$,

o) $\iint\limits_D (6-x)dxdy$, $D: \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2\sqrt{x} \\ x = 6 \end{cases}$,

p) $\iint\limits_D (10-x-y)dxdy$, $D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$,

r) $\iint\limits_D \left[\frac{6-x^2-y^2)}{4} - \frac{x^2+y^2}{2}\right] dxdy$, $D: \begin{cases} x^2+y^2 \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$,

s) $\iint\limits_D \left[\sqrt{8-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right] dxdy$, $D: \quad x^2+y^2 \leq 4$,

t) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, $D: \begin{cases} y \geq x \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$,

u) $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$, $D: \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le e^2 \end{cases}$,

Zad. 4

a) $\int_0^1 (\int_0^1 [\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x+y+z}}\,dz]dy)dx$,

b) $\int_0^1 (\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [\int_0^a dz]dy)dx$,

c) $\int_0^2 (\int_0^{\sqrt{4-x^2}} [\int_{x^2+y^2}^4 dz]dy)dx$],

d) $\int_0^2 (\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} [\int_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz]dy)dx$,

e) $\int_0^2 (\int_0^{\sqrt{4-y^2}} [\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx]dz)dy$],

f) $\int_0^1 [\int_0^{\sqrt{1-y^2}} [\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz]dx]dy$,

g) $\int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} [\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz]dy)dx$,

h) $\int_0^2 (\int_0^{\sqrt{4-x^2}} [\int_{2+\sqrt{x^2+y^2}}^4 dz]dy)dx$],

i) $\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dxdydz$, $V: \begin{cases} x=0,\ y=0,\ z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$,

j) $\iiint_V z\,dxdydz$, $V: \begin{cases} x=0,\ y=0,\ z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$,

k) $\iiint_V y\cos(x+z)\,dxdydz$, $V: \begin{cases} y=0,\ z=0 \\ y=\sqrt{x} \\ x+z=\frac{\pi}{2} \end{cases}$,

l) $\iiint_V z\,dxdydz$, $V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$,

m) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, $\qquad V:\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=1 \end{cases}$,

n) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, $\qquad V:\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x,y\geq 0 \end{cases}$

o) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, $\qquad V:\begin{cases} r^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$.

Zad. 4 Zakładając, że obszary są jednorodne o gęstości μ

a) Obliczyć współrzędne środka ciężkości obszaru ograniczonego liniami:

   a) $x^2+y^2=r^2$, $\quad y=0 \quad dla \quad y\geq 0$;

   b) $y=4-x^2$, $\quad y=0$.

b) Obliczyć moment bezwładności kwadratu o boku *a* względem wierzchołka.

c) Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach *a,b* względem punktu przecięcia przekątnych.

d) Obliczyć moment bezwładności koła o promieniu *r* względem jego średnicy.

e) Obliczyć moment bezwładności figury ograniczonej krzywymi $y^2=ax$, $\quad x=a$ względem prostej $y=-a$.