Lista nr 2

Funkcje elementarne i ich własności. Funkcja złożona i odwrotna.

Zad.1 Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Jak z tego wykresu otrzymać wykres funkcji:

$$|f(x)|,\ a+f(x),\ f(x+b),\ f(cx),\ f(-x),\ -f(x),\qquad \text{gdzie } a,b,c\in R.$$

Zad.2 Sporządzić wykresy funkcji określonych wzorami:

a) $f(x)=\left||x+1|-5\right|$, b) $f(x)=\left||x+1|-|3-x|\right|$, c) $f(x)=\left|\frac{4}{x-3}-2\right|$, d) $f(u)=\frac{1}{2}(\sin u+|\sin u|)$,

e) $g(x)=[x+1]-2$, f) $f(t)=\operatorname{sgn}\frac{t-1}{t+1}$, g) $f(r)=\left|3^{r+3}-2\right|$, h) $h(x)=\log_2|x+1|$.

Zad.3 Wyznaczyć dziedzinę następujących funkcji:

a) $f(x)=\log(1-2\cos x)$, b) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{4-x}}{\log(x^2-4)}$, c) $f(t)=\arcsin(\log t)$,

d) $h(u)=\frac{u}{\sqrt{\sin u}}$, e) $f(x)=\arccos\sqrt{x}$, f) $f(x)=\log\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+3}$.

Zad.4 Wyznaczyć okres podstawowy funkcji (jeśli istnieje):

a) $f(x)=3\sin\frac{3}{4}x$, b) $f(x)=\sin x+\cos\sqrt{3}x$, c) $f(x)=2\sin 3x+3\cos 2x$, d) $g(x)=x-[x]$.

Zad.5 Wykazać, że $f(x)=2\log(x+1)$ jest różnowartościowa w całej dziedzinie.

Zad.6 Na podstawie definicji ustalić, które z podanych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

a) $f(x)=x^4+2x^2+2,\ x\in<-1,2>$, b) $f(x)=2^x+2^{-x}x^2\cos x$, c) $g(x)=|2x|\frac{1}{x}$,

d) $f(x)=x\log\frac{2x^2+x+1}{2x^2-x+1}$, e) $g(x)=\log\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)$.

Zad.7 Zbadać monotoniczność funkcji:

a) $f(x)=2x^2+x,\ x\in<-4,-\frac{1}{4}>$, b) $g(x)=3^x+2$, c) $h(x)=\frac{2x}{x+1},\ x\in(-1,\infty)$.

Zad.8 Wyznaczyć $f(g(x)),\ g(f(x))$ (jeśli to możliwe), gdy:

a) $f(x)=x^2+3$ i $g(x)=\sqrt{x-1}$, b) $f(x)=\cos x$ i $g(x)=\log x$.

Zad.9 Wyznaczyć wzór funkcji odwrotnej do danej (jeśli to możliwe):

a) $f(x)=x^4-2x^2+1,\ x\in<1,\infty)$, b) $g(x)=2^x,\ x\in R$, c) $h(x)=\ln x,\ x>0$.

Zad.10 Cukier jest sprzedawany w jednokilogramowych torebkach oraz w workach zawierających 50 takich torebek. Cena jednego worka wynosi 80 zł, a torebki 2 zł. Znaleźć funkcję podającą, jaką maksymalną liczbę kilogramów cukru może kupić przedsiębiorca dysponujący kwotą x złotych. Narysować wykres tej funkcji. Jak będzie wyglądał wykres te funkcji, gdy przyjmiemy, że $x\in N\cup\{0\}$?

Literatura pomocnicza:

M. Gewert, Z. Skoczylas „ Analiza matematyczna 1” (przykłady i zadania)
M. Grabowski „Analiza matematyczna”
W.Stankiewicz "Zadania z matematyki dla WUT"

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Funkcja wykładnicza, logarytmiczna i funkcje trygonometryczne. Definicje, własności i wykresy funkcji. Metody rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych, logarytmicznych i trygonometrycznych.

Zad.1 Sporządzić wykres funkcji:

$$a)\, y = 2^{x+2}, \quad b)\, y = \frac{1}{3}^{x-1}, \quad c)\, y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x+4}.$$

Zad.2 Rozwiązać równania:

$$a) 4^{2x-5} = 256, \quad b) 3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}, \quad c) 2^{2x-1}3^x = 72, \quad d) 3\cdot 81^x - 10\cdot 9^x + 3 = 0,$$

$$e) 2^{x^2-5x+10} = 64, \quad f) 2^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{x-1}}.$$

Zad.3 Rozwiązać nierówności:

$$a) \frac{1}{2^x+2} < \frac{2^x}{2^x-1}, \quad b) 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4, \quad c) 27^{-3x} > 81, \quad d) 2^{3x+5} - 4^{x-1} > 0,$$

$$e) 3^{\frac{1}{x}} < 3^{2x}, \quad f) \left(\frac{1}{8}\right)^x > 4, \quad g) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} > \frac{1}{4}.$$

Zad.4 Sporządzić wykres funkcji:

$$a) y = \log_2 x \;\; i \;\; y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad b) y = \log_2 8x, \quad c) y = \log_3 \frac{x}{9}, \quad d) y = \log_{10}(x+5).$$

Zad.5 Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

$$a) y = \log_2 x + \sqrt[3]{-x}, \quad b) y = \log_4 x + \sqrt{-x}, \quad c) y = \log_3 \frac{x}{x+1}.$$

Zad.6 Rozwiązać równania:

$$a) \log_3\left[\log_5(2x+1)\right] = 0, \; b)\, \log_3(5x+1) - \log_3(x-1) = 2, \; c) 3\log_3(x+1) = \log_3(x^3 + 2x^2 + 4x + 7),$$

$$d) \log_a x + \log_a(x+1) = 0, \; e) \log_x 10 + \log_{x^2} 10 = 6, \quad f) x^{\log_x 10} = 100x.$$

Zad.7 Rozwiązać nierówności:

$$a) \log_3^2 x + 3\log_3 x + 2 < 0, \quad b) \log_{\sqrt{2}}(2x-8) \le 3, \quad c) \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x} \le 2.$$

Zad.8 Obliczyć bez pomocy tablic :

$$a) \sin 75^\circ, \; b) \cos 44^\circ \cos 14^\circ + \sin 44^\circ \sin 14^\circ, \; c) \frac{\operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}{1 - \operatorname{tg} 100^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}, \; d) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ.$$

Zad.9 Udowodnić tożsamości trygonometryczne:

$$a) \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \; b) \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, c) \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Zad.10 Rozwiązać równanie:

$$a) \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b) \cos 5x = 0, \quad c) 2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0, \quad d) \operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0.$$

Zad 11 Narysować wykres funkcji:

$$a)\, y = \sin 2x, \quad b) y = \cos\frac{1}{2}x, \quad c) y = \operatorname{tg} 3x, \quad d) y = \operatorname{ctg}\frac{1}{5}x.$$

Odpowiedzi:

2) $a)\ \frac{9}{2},\ b)\ -1,\ c)\,2,\ d)\,x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2},\ e)\,x_1=1,\ x_2=4,\ f)\,\text{równanie nie ma pierwiastków}.$

3) $a)\,x>0,\ b)-2<x<0,\ c)\ x<-\frac{4}{9},\ d)\ x>-7,\ e)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<0\ \text{lub}\ x>\frac{\sqrt{2}}{2},\ f)\,x<-\frac{2}{3}\ ,\ g)2<x<3.$

5) $a)\ (0;+\infty),\ b)$ zbiór pusty, $c)(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$

6) $a)\ 2,\ b)\ \frac{5}{2},\ c)3,\ d)\,x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1),\ e)\,x=\sqrt[4]{10},\ f)\,x_1=\frac{1}{10},\ x_2=100.$

7) $a)\frac{1}{9}<x<\frac{1}{3},\ b)\ x\le 4+\sqrt{2},$ c) $x\in(0;1)\cup\{3\}.$

8) $a)\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1),\ b)\ \frac{1}{2}\sqrt{3},\ c)-\frac{1}{3}\sqrt{3},\ d)\frac{\sqrt{6}}{2}.$

10) $a)20^\circ+k\cdot120^\circ,\ 40^\circ+k\cdot120^\circ, b)18^\circ+k\cdot36^\circ, c)60^\circ+k\cdot120^\circ\ d)\pm45^\circ+k\cdot180^\circ,\ \pm60^\circ+k\cdot180^\circ.$

dr Radosława Kranz