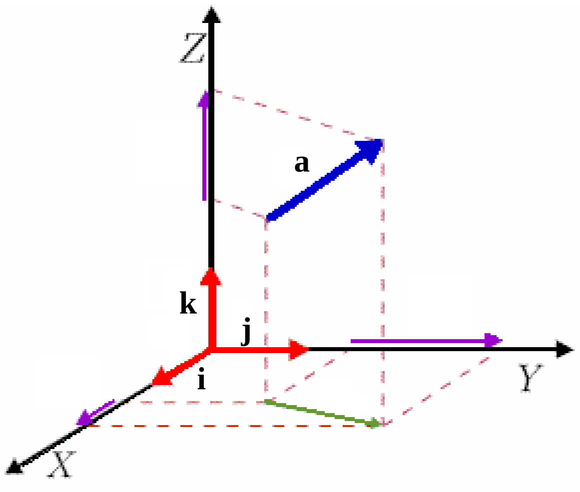
ĆWICZENIA 11 – TEORIA (iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany)

Uwaga: Wszystkie informacje zawarte w tych materiałach dotyczyć będą wektorów w przestrzeni $\mathbf{R}^3$.



Definicja 1

Wektory $\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ będziemy nazywać *wersorami* odpowiednio osi OX, OY i OZ.

I ILOCZYN SKALARNY

Definicja 2

Iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{a}=[a_1, a_2, a_3]^T$ i $\mathbf{b}=[b_1, b_2, b_3]^T$ określony jest wzorem:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Twierdzenie

Jeśli α jest kątem między niezerowymi wektorami **a** i **b**, to

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\alpha.$$

Twierdzenie

Niezerowe wektory **a** i **b** są *prostopadłe* (ortogonalne), wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{a}\circ\mathbf{b}=0.$$

II ILOCZYN WEKTOROWY

Mnożenie wektorowe jest to operacja, której wynikiem jest nowy wektor. Iloczyn wektorowy pary wektorów **a** i **b** oznaczamy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{v}$.

Definicja 3 Niech $\mathbf{a}=[a_1, a_2, a_3]^T$ i $\mathbf{b}=[b_1, b_2, b_3]^T$ będą niewspółliniowymi wektorami w przestrzeni $\mathbf{R}^3$. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary wektorów **a** i **b** nazywamy wektor $\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, który spełnia warunki:

1) **v** jest wektorem prostopadłym do **a** i do **b** (innymi słowy **v** jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach **a** i **b**)
2) jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach **a** i **b**, tzn. $|\mathbf{v}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\alpha$, gdzie α jest katem miedzy wektorami **a** i **b**
3) orientacja trójki wektorów **a** , **b**, **v** jest zgodna z orientacja układu współrzędnych OXYZ.

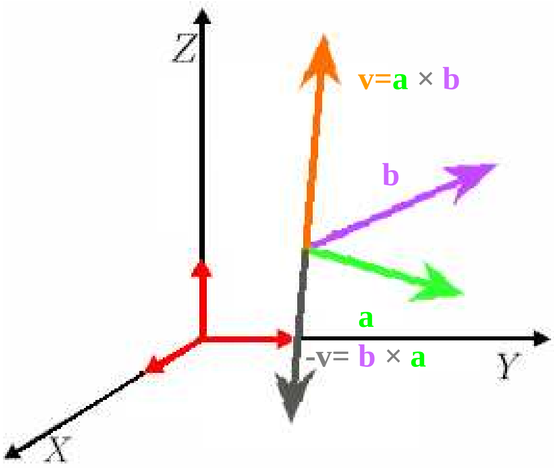
Twierdzenie Składowe wektora **v** = **a** × **b** obliczamy ze wzoru:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie Własności iloczynu wektorowego:

1) **a** × **b** = - **b** × **a**
2) (*k***a**) × **b** = *k* (**a** × **b**)
3) **a** ×(**b** + **c**)= **a** × **b** + **a** × **c**
4) **a** × **a** = **0**

Twierdzenie Iloczyn wektorowy jest wektorem zerowym **a** × **b** = **0** wówczas, gdy jeden z wektorów wyjściowych jest zerowy lub gdy wyjściowe wektory są równoległe.



Z powyższego twierdzenia otrzymujemy warunek równoległości wektorów:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Przykład Oblicz iloczyn wektorowy **a** × **b**, gdy: **a** = [1,2, 3] ^{T}, **b** = [3,2, -1] ^{T}.

Rozwiązanie:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix} = \mathbf{i}\cdot 2\cdot(-1) + \mathbf{j}\cdot 3\cdot 3 + \mathbf{k}\cdot 1\cdot 2 - (\mathbf{k}\cdot 2\cdot 3 + \mathbf{i}\cdot 3\cdot 2 + \mathbf{j}\cdot 1\cdot(-1)) =$$

$$= -8\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Stąd wektor **v** będący iloczynem wektorowym **v** = **a** × **b** jest postaci $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Przykład Oblicz pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach **a** = [1,2, 3] ^{T}, **b** = [3,2, -1] ^{T}.

Rozwiązanie:

Z definicji iloczynu wektorowego wiemy, że długość wektora **v** = **a** × **b** jest równa polu powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach **a** i **b**. Stąd w pierwszej kolejności należy wyliczyć wektor **v** (co zrobiliśmy w poprzednim przykładzie).

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Następnie obliczamy długość tego wektora (patrz ćwiczenia 2): $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-8)^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

A zatem pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach **a** , **b** wynosi $6\sqrt{5}\,j^2$.

<u>Przykład</u> Sprawdź czy wektory **a** = [1,2, 3] ^{T}, **b** = [2,4, 6] ^{T} są równoległe.

Rozwiązanie:

Jak wiadomo **a** || **b** ⇔ **a** × **b**= **0** stąd sprawdzenie, czy wektory są równoległe zaczynamy od wyliczenia ich iloczynu wektorowego:

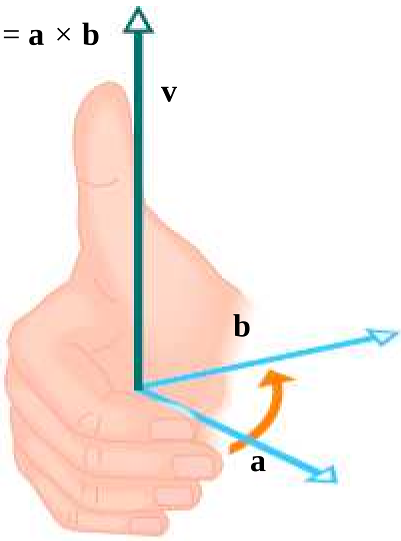
$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{array}\right. = \mathbf{i}\cdot 2\cdot 6 + \mathbf{j}\cdot 3\cdot 2 + \mathbf{k}\cdot 1\cdot 4 - (\mathbf{k}\cdot 2\cdot 2 + \mathbf{i}\cdot 3\cdot 4 + \mathbf{j}\cdot 1\cdot 6) =$$

$$= 0\cdot\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k} = [0,0,0]^T.$$

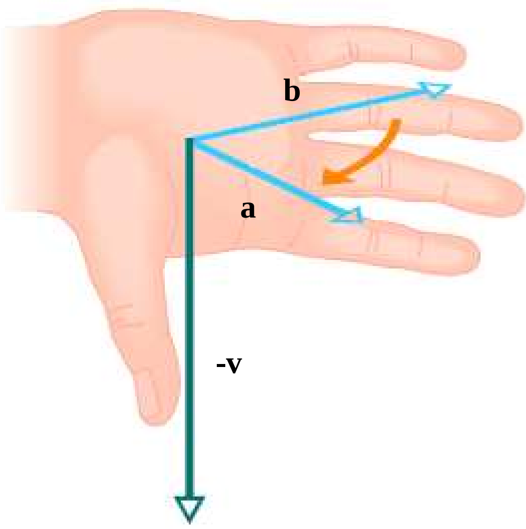
Iloczyn **a** × **b** wektorów jest wektorem zerowym, stąd wektory te są równoległe.

Ciekawostka: Reguła prawej dłoni do wyznaczania kierunku iloczynu wektorowego

a) **v** = **a** × **b**



b) **- v** = **b** × **a**



a) Jeśli ustawisz palce wzdłuż łuku mniejszego kąta miedzy wektorami **a** i **b**, to kciuk wskazuje kierunek wektora **v** = **a** × **b**. b) Jak widać, kierunek wektora **b** × **a** jest przeciwny do kierunku wektora **a** × **b**.

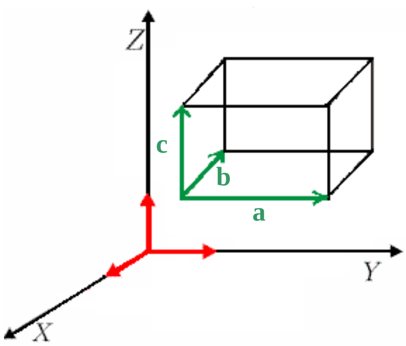
III ILOCZYN MIESZANY

<u>Definicja 3</u> Niech **a**=[a_1, a_2, a_3]^T , **b**=[b_1, b_2, b_3]^T i **c**=[c_1, c_2, c_3]^T . *<u>Iloczynem</u>* *<u>mieszanym</u>* trójki wektorów **a**, **b** i **c** nazywamy wartość (**a** × **b**) ∘ **c**.

ĆWICZENIA 11 – TEORIA (iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany)

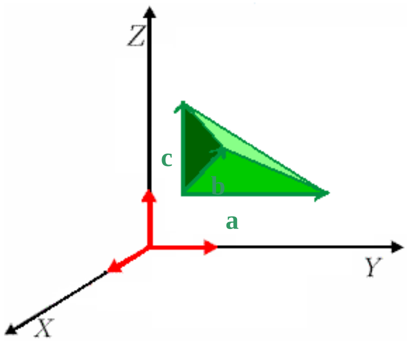
Twierdzenie

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$



Twierdzenie Iloczyn mieszany wektorów **a**, **b** i **c** jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach, tzn

$$V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}|.$$



Twierdzenie Objętość czworościanu zbudowanego na wektorach **a**, **b** i **c** wyraża się wzorem

$$V_{cz} = \frac{1}{6}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}|.$$

Uwaga: Jeżeli $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = 0$ to wektory leżą w jednej płaszczyźnie (o takich wektorach mówimy też, że są liniowo zależne).

Przykład Oblicz iloczyn mieszany $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}$, gdy: $\mathbf{a} = [1,2,3]^T$, $\mathbf{b} = [3,2,-1]^T$ i $\mathbf{c} = [3,0,0]^T$.

Rozwiązanie:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\circ\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 1\cdot2\cdot0 + 2\cdot(-1)\cdot3 + 3\cdot3\cdot0 - (3\cdot2\cdot3 + 1\cdot(-1)\cdot0 + 2\cdot3\cdot0) =$$

$$= -24$$

Przykład Sprawdź współpłaszczyznowość wektorów $\mathbf{a} = [1,2,3]^T$, $\mathbf{b} = [3,1,-1]^T$ i $\mathbf{c} = [1,1,1]^T$.

Wektory **a**, **b** i **c** leża na jednej płaszczyźnie (są współpłaszczyznowe) wówczas gdy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = 0$.

Stąd $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\circ\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1\cdot2\cdot1 + 2\cdot(-1)\cdot1 + 3\cdot3\cdot1 - (3\cdot1\cdot1 + 1\cdot(-1)\cdot1 + 2\cdot3\cdot1) = 0$,

a zatem wektory są współpłaszczyznowe.

Przykład Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{a} = [1,2,3]^T$, $\mathbf{b} = [3,2,-1]^T$ i $\mathbf{c} = [3,0,0]^T$.

Rozwiązanie:

$$V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}| = |-24| = 24\, j^3.$$