

LISTA nr 2

Liczby zespolone. Postać algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych. Wielomiany. Pierwiastki wielomianów. Zasadnicze twierdzenie algebry. Ułamki proste.

Zad.1 Wykonać podane działania:

$$a) (-2 + 3i) + (7 - 8i); \quad b) (\sqrt{7} - \sqrt{3}i)(\sqrt{7} + \sqrt{3}i); \quad c) \frac{2 + 3i}{1 + i};$$

$$d) z \cdot \bar{w}, \quad \frac{z - w}{z + w}, \quad \frac{z^2}{w}, \quad \frac{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} w}{z + w} \quad \text{dla} \quad z = 5 - 2i, \quad w = 3 + 4i.$$

Zad.2 Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające podane równania:

$$a) x(-\sqrt{2} + i) + y(3\sqrt{2} + 5i) = 8i; \quad b) (2 + iy)(x - 3i) = 7 - i; \quad c) \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{9 - 2i}{9 + 2i}.$$

Zad.3 Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej wraz ze swymi sprzężeniami:

$$a) -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad b) -1 - i; \quad c) -2i; \quad d) -4 \quad e) i; \quad f) 3 - 3i; \quad g) -3 + 4i; \quad h) -1 + i.$$

Zad.4 Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb spełniających podane warunki:

$$a) \operatorname{Im}[(1 + 2i)z - 3i] < 0; \quad b) z^2 = 2 \operatorname{Re}(iz); \quad c) |z + 1 - 2i| = 3; \quad d) |(1 + i)z - 2| \geq 4; \quad e) \frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{2}{3}\pi.$$

Zad.5 Obliczyć korzystając ze wzoru Moivre'a (wynik podać w postaci algebraicznej):

$$a) (1 + i)^7; \quad b) (\sqrt{3} - i)^{32}; \quad c) (-2 + 2i)^8; \quad d) (-2 - 2\sqrt{3}i)^{20}; \quad e) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^4.$$

Zad.6 Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

$$a) \sqrt{-81}; \quad b) \sqrt[3]{8}; \quad c) \sqrt[4]{-\sqrt{3} - i}; \quad d) \sqrt[6]{1}; \quad e) \sqrt[3]{8i}; \quad f) \sqrt[6]{-27}; \quad g) \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}.$$

Zad.7 W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

$$a) 2z + (1 + i)\bar{z} = 1 - 3i; \quad b) z^2 - z + 1 = 0; \quad c) z^2 - 3z + 3 + i = 0; \quad d) z^3 - z^2 + z - 1 = 0.$$

Zad.8 Znaleźć wszystkie pierwiastki podanych wielomianów:

$$a) W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 8; \quad b) W(x) = x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3; \quad c) W(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3, \\ d) W(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2x + 5; \quad e) W(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 1.$$

Zad.9 Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę ułamków prostych:

$$a) \frac{1}{x^2(x-1)^2}; \quad b) \frac{x^2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}; \quad c) \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x}; \quad d) \frac{2z}{z^2 + 9}; \quad e) \frac{z + 4}{(z + i)^2}; \quad f) \frac{1}{z^2 + 2iz - 4}.$$

Literatura pomocnicza:

T. Jurlewicz, Z. Skoczylas "Algebra liniowa 1" (przykłady i zadania)

W. Krysicki, L. Włodarski "Analiza matematyczna w zadaniach" (część pierwsza)

L. Jeśmanowicz, J. Łoś "Zbiór zadań z algebry"