KURS WYRÓWNAWCZY Z MATEMATYKI

LISTA 1

Zdaniem w logice albo *zdaniem logicznym* nazywamy każde zdanie orzekające, któremu można przypisać jedną z dwóch ocen: prawdę albo fałsz.

Dwa zdania p, q łączymy *spójnikami logicznymi*:
– koniunkcji $p \wedge q$,
– altrenatywy $p \vee q$,
– implikacji $p \Rightarrow q$,
– równoważności $p \Leftrightarrow q$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Prawem rachunku zdań lub *tautologią* nazywamy zbudowne ze zdań prostych i spójników wyrażenie, które niezależnie od wartości logicznych tych zdań jst zawsze zdaniem prawdziwym.

1. Które z podanych zdań jest zdaniem logicznym:
 a) 169 jest kwadratem liczby naturalnej.
 b) Gniezno jest stolicą Polski.
 c) Czy dzisiaj jest czwartek?
 d) Podaj mi tę książkę.
 e) Na każdym czworokącie można opisać okrąg.

2. Oceń wartość logiczną zdań:
 a) Kwadrat ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe.
 b) Kwadrat ma wszystkie boki równe lub wszystkie kąty równe.
 c) Jeżeli Toruń leży nad Wisłą, to pies jest ssakiem.
 d) Jeżeli Toruń leży nad Wisłą, to pies nie jest ssakiem.
 e) Liczba -5 jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 3 jest ujemna.
 f) Toruń leży nad Wisłą wtedy i tylko wtedy, gdy Wisła przepływa przez Toruń.

3. Zapisz podane zdania za pomocą symboliki kwantyfikatorów:

a) Istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie $x^2 - 4 = 0$.

b) Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $x^2 < 0$.

c) Dla każdej liczby rzeczywistej x, jeśli $x > 1$, to $x^2 > 1$.

d) Istnieje liczba rzeczywista $x < 1$, że $x^2 < 1$.

e) x jest liczbą parzystą.

f) x jest sumą kwadratów dwu liczb naturalnych.

g) Każda liczba przy dzieleniu przez 2 daje resztę 0 lub 1.

4. Które z poniższych zdań jest prawdziwe, a które fałszywe?

a) $\forall_{x\in R}\ (x > 0)$, b) $\forall_{x\in R}\forall_{y\in R}\ ((x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$,

c) $\forall_{x\in R}\exists_{y\in R}\ (x + y = 0)$, d) $\exists_{x\in R}\forall_{y\in R}\ (x + y = 0)$,

e) $\exists_{x\in R}\exists_{y\in R}\ (x + y = 0)$, f) $\forall_{x\in R}\forall_{y\in R}\ (x + y = 0)$.

5. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

a) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$;

b) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$;

c) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$;

d) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$;

e) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$;

f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$;

g) $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$;

h) $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$;

i) $\sim [p \wedge ((\sim p) \wedge q)]$;

j) $[(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

6. Udowodnić, że jeżeli liczby a i b są parzyste, to liczba $a + b$ też jest parzysta.

7. Udowodnić, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

8. Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{\frac{7}{5}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{6}}\right)$; b) $\frac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9 - 4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19} - 7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}$;

c) $\frac{12\cdot 5^{2n+1} - 8\cdot 5^{2n} + 4\cdot 5^{2n-1}}{4\cdot 5^{2n-2}}$; d) $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$.

9. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $(x - 4y)(x + 3y) - (x - 3y)^2$; b) $\left(\frac{a^2+b^2}{b} - a\right) \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$;

c) $\frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$; d) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-2}$.

Listę opracowała dr Elżbieta Sidorowicz