KURS WYRÓWNAWCZY Z MATEMATYKI

LISTA 2

1. Obliczyć

$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{2^k}$ $\sum_{i=-3}^{3} i^3$ $\sum_{n=0}^{5} (\frac{1}{3})^n$ $\prod_{k=1}^{5} \frac{k}{2k-1}$ $\prod_{j=-1}^{2} (\frac{3}{2})^j$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ $\prod_{i=1}^{n} (1+\frac{1}{i})$ $\prod_{j=2}^{n} (1-\frac{1}{j^2})$.

2. Zapisać za pomocą znaku Σ następujące wzory :

$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$, $-1+1-1+1-1+1$, $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$.

3. Znaleźć siódmy wyraz rozwinięcia $(2a+b^2)^8$.

4. W rozwinięciu dwumianu $(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^n$ współczynnik przy trzecim wyrazie wynosi 28. Znaleźć środkowy wyraz tego rozwinięcia.

5. Zbadać, które wyrazy rozwinięcia dwumianu $(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^5$ nie zawierają niewymierności.

6. Stosując zasadę indukcji zupełnej wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n :

(a) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, (b) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, (d) $\sum_{k=1}^{n} n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(e) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$, (f) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{n}{2n+1}$,

(g) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)}=\frac{n}{3n+1}$, (h) $\sum_{j=1}^{n} j\cdot 2^j=2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$,

(i) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2=\binom{2n}{n}$, (j) $\sum_{j=1}^{n} j\cdot j!=(n+1)!-1$.

7. Dowieść,że dla każdej liczby naturalnej n :

$2 \mid n^2+n$, $6 \mid n^3-n$, $133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$, $25 \mid 2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$.

8. Wykazać,że dla każdej liczby naturalnej n :

(a) $(1+x)^n \geq 1+nx$ *dla* $x \geq -1$ (nierówność Bernoulliego),

(b) $a^n+b^n \leq (a+b)^n$ o ile $a \geq 0$, $b \geq 0$,

(c) $\sqrt{a_1+a_2+...+a_n} \leq \sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}$ jeżeli $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$,

(d) $2^n \rangle\ n$, (e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, (f) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

9. Udowodnić,że :
(a) $2^n \rangle\ n^2$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 5$,
(b) $2^n \leq n!$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$,
(c) $2n + 1 \langle\ 2^n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$,
(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \rangle\ \sqrt{n}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,
(e) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \rangle\ \frac{13}{24}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

10. Pokazać,że suma,różnica,iloczyn i iloraz (przez liczbę różną od 0) dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną.

11. Zapisać poniższe zbiory wyznaczając wszystkie ich elementy :
$\{x \in \mathbb{N} : |x - 2|\ \langle\ 3\}$, $\big\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 = 0\big\}$, $\{t \in \mathbb{Z} : |3 - t|\ \langle\ 4\}$,
$\big\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 11\ \langle\ 0\big\}$, $\{z \in \mathbb{R} : \frac{|z+1|}{z^2+1} \leq 0\}$, $\big\{n \in \mathbb{N} : n^2 - 5n\ \langle\ 0\big\}$,
$\{a \in \mathbb{Z} : |a - 4|\ \rangle\ 1 \ \wedge\ |a| \leq 4\}$.

12. Znalźć zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$, jeżeli :
(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4\}$,
(b) $A = [-5, 3)$, $B = (3, 8]$, (c) $A = (2, \infty)$, $B = (-\infty, 3]$,
(d) $A = (-\infty, 3]$, $B = [-5, 4)$, (e) $A = [3, 7]$, $B = (3, 4)$,
(f) $A = (-2, 3]$, $B = (-\infty, -1] \cup (3, 5]$,
(g) $A = [-3, 2)$, $B = (-\infty, -2) \cup (2, 5]$,
(h) $A = (-\infty, 2) \cup [5, \infty)$, $B = [-1, 5)$.

13. Na zbiorach $A = [-5, 6)$ i $B = (3, 8]$ wykonać działania : $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$, $(\mathbb{R} \setminus B) \cup A$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$.

14. Obliczyć $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, jeżeli :
(a) $A_n = (n, \infty)$, (b) $A_n = [-\frac{2}{n}, \frac{1}{n+1})$, (c) $A_n = [(-1)^n, 2 - \frac{1}{n}]$.

15. Wyznaczyć iloczyny kartezjańskie $A \times B$ oraz $B \times A$ dla zbiorów:
(a) $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, (b) $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$.

16. Zaznaczyć w układzie współrzędnych następujace zbiory :
$(1, 3] \times [-2, 1]$, $[-2, 0] \times (1, 4)$, $\mathbb{Z} \times [1, 3)$, $(1, 4] \times \{2\}$, $(0, \infty) \times [0, \infty)$.

17. Wyznaczyć kres dolny i kres górny poniższych zbiorów :
$\{-1, 0, 1\}$, $[1, 4)$, $(-3, \infty)$, $(-\infty, \sqrt{2}]$, $(-2, 3] \cap \mathbb{Q}$, $[1, 5] \setminus \mathbb{Q}$.

18. Wykazać,że dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y :
(a) $|x| \geq 0,$ (b) $|-x| = |x|,$ (c) $-|x| \leq x \leq |x|,$
(d) $\sqrt{x^2} = |x|,$ (e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$ (f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},$ o ile $y \neq 0,$
(g) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|,$
(h) $|x| \langle\ a \Leftrightarrow -a \langle\ x \langle\ a \Leftrightarrow x \in (-a, a) \quad dla \quad a \rangle\ 0,$
(i) $|x| \rangle\ a \Leftrightarrow -a \langle\ x \vee x \langle\ a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \quad dla \quad a \rangle\ 0.$

19. Rozwiązać poniższe równania i nierówności :
(a) $|x + 1| = 3,$ (b) $|x - 2| = 1,$ (c) $|x + 3| = -2,$ (d) $|2x + 1| \leq 0,$
(e) $\left|\frac{x}{4} - 1\right| \langle\ 5,$ (f) $|x + 1| \leq 2,$ (g) $|2 - x| \geq 1,$ (h) $|2x - 1| \rangle\ 3,$
(i) $||2x - 7| - 3| = 2,$ (j) $||5x + 3| - 6| \geq 4,$ (k) $|4 - |2x - 3|| \langle\ 6,$
(l) $||-3x + 1| + 2| \rangle\ 3,$ (m) $||2 - 5x| - 3| \leq 2.$

20. Rozwiązać następujące równania i nierówności :
(a) $|x + 1| = |x - 1|,$ (b) $|x + 1| + 2|x - 1| = 5,$
(c) $|4 - 2x| + |-x + 3| = 5,$ (d) $|1 - 2x| + |2x - 6| = x,$
(e) $|2 - x| + |3x + 1| - x = 11,$ (f) $||3 - x| - |2x - 5|| = 1,$
(g) $||2 - 5x| - |x - 4|| \rangle\ 2,$ (h) $||x + 1| - |2 - x|| \geq 3,$
(i) $||2 - 3x| + x - |2x - 4|| \leq 2,$ (j) $||2x - 7| + |2 - x| + x| \leq 5,$
(k) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1 + |2 - x| \langle\ 4},$ (l) $|x + 2| + |3 - 4x| + |3x - 6| \geq 9,$
(m) $|x + 3| - 3|x| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2.$

21. Naszkicować wykresy funkcji :
(a) $y = |2x - 3|,$ (b) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4},$ (c) $y = ||3 - x| - 1|,$
(d) $y = |1 - |x + 1||,$ (e) $y = |||x - 1| - 1| - 1|,$ (f) $y = |||x + 1| - 1| + 2|,$
(g) $y = |x + 2| + |x - 1| + |4 - 2x|.$

Listę opracował dr Krzysztof Feledziak