

# KURS WYRÓWNAWCZY Z MATEMATYKI

## LISTA 4

- Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = \pi x + \pi^2$ . Prosta  $k$  jest wykresem funkcji  $f$ .
  - Wyznacz te argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości nieujemne.
  - Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej  $k$  z wykresem funkcji  $g(x) = x + \pi$ .
  - Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt  $P = (-1, \pi)$  i równoległej do prostej  $k$ .
- Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = 4x + 1$ . O funkcji  $g$  wiemy, że:
  - współczynnik kierunkowy prostej, która jest wykresem funkcji  $g$ , jest liczbą przeciwną do współczynnika kierunkowego prostej będącej wykresem funkcji  $f$ ;
  - miejsce zerowe funkcji  $g$  jest liczbą odwrotną do miejsca zerowego funkcji  $f$ . Znajdź wzór funkcji  $g$ .
- Znajdź wzór malejącej funkcji  $f(x) = ax + b$  wiedząc, że wykres funkcji  $f$  nie przechodzi przez początek układu współrzędnych, a współczynniki  $a$  i  $b$  są rozwiązaniami równania  $2x^3 - x^2 - x = 0$ .
- Wykres funkcji liniowej  $f$  przechodzi przez punkty  $K = (3, 5)$  i  $L = (-1, -7)$ 
  - Znajdź wzór funkcji  $f$ .
  - Wyznacz te argumenty, dla których wartości funkcji  $f$  są mniejsze od wartości funkcji  $g(x) = x^2 - 5x + 8$ .
  - Oblicz współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji  $f$  i funkcji  $g$ .
- Rozwiąż równanie  $\sqrt{4x^2 + 20} + 25 + 3x + 8 = 0$
- Rozwiąż nierówność  $|x| + \sqrt{x^2 - 2x + 1} \leq 2 - x$
- Wyznacz wszystkie liczby pierwsze spełniające nierówność  $(x - 5)^2 + (x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + x) \geq (2x + 14)(x - 7)$ .
- Niech  $A$  będzie zbiorem rozwiązań nierówności  $x - \frac{x-4}{3} < 2x - 8$ , a  $B$  zbiorem rozwiązań nierówności  $x(x - 4) + 1 \geq (x + 1)^2 - 6x$ .
  - Wyznacz zbiory  $A$  i  $B$ .
  - Zapisz w postaci przedziału zbiory  $A \cap B$  i  $B \setminus A$ .
- Rozwiąż układ równań 
$$\begin{cases} y = (x - 3)^2 - (x - 2)^2 \\ 4(5x + 3) = (y + 1)^2 - (y - 1)(y + 1) \end{cases}$$
- Dana jest funkcja  $f(x) = |x + 2| - 3$  dla  $x \in R$ 
  - Naszkiej wykres funkcji.
  - Wyznacz zbiór wartości funkcji  $f$ .
  - Podaj miejsca zerowe.
  - Wyznacz wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $f(x) = m$  nie ma rozwiązania.

11. Punkty  $A = (0, 5)$  i  $B = (1, 12)$  należą do wykresu funkcji  $f(x) = x^2 + bx + c$ . Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci
- ogólnej,
  - kanonicznej,
  - iloczynowej.

12. Znajdź wzór funkcji kwadratowej  $y = f(x)$ , której wykresem jest parabola o wierzchołku  $(1, -9)$  przechodząca przez punkt  $(2, -8)$ . Otrzymaną funkcję przedstaw w postaci kanonicznej. Oblicz jej miejsca zerowe i naszkicuj wykres.

13. Dana jest funkcja  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \in \langle -3, 1 \rangle \\ -(x-2)^2 & \text{dla } x \in (1, 3) \\ x-4 & \text{dla } x \in \langle 3, 4 \rangle \end{cases}$

Naszkicuj wykres. Podaj miejsca zerowe. Podaj przedziały, w których funkcja jest malejąca.

14. Liczby 2 i 4 są miejscami zerowymi funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + 16$
- Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$ .
  - Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci iloczynowej.
  - Wykres funkcji  $g$  otrzymano przesuwając wykres funkcji  $f$  o trzy jednostki w prawo i dwie jednostki do góry. Wyznacz zbiór wartości funkcji  $g$ .

15. Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ .
- Znajdź miejsca zerowe funkcji  $f$ .
  - Znajdź punkt przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osią  $OY$ .
  - Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem  $f$ .
  - Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .
  - Określ zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji  $f$ .

16. Naszkicuj wykres funkcji:

a)  $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$

b)  $f(x) = x \cdot |x - 4|$

c)  $f(x) = |x^2 - 4|$

17. Nie obliczając pierwiastków równania  $2x^2 - 5x - 6 = 0$ , oblicz

- iloczyn pierwiastków tego równania,
- sumę odwrotności pierwiastków tego równania,
- sumę kwadratów pierwiastków tego równania,
- sumę odwrotności kwadratów pierwiastków tego równania.

18. Dla jakich wartości parametru  $a$  równanie  $x^2 + 8x + a + 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki jednakowych znaków?

19. Rozwiąż równania:

a)  $x^2 - 6 = 0$ ;      b)  $-\frac{1}{3}x^2 + x = 0$       c)  $6x^2 - x - 2 = 0$

20. Rozwiąż nierówności:

a)  $x^2 + 6x + 10 > 0$       b)  $-x^2 - x + 15 \leq 4x^2 + 12x + 9$       c)  $|x^2 - 4| < 9$

21. Dla jakich wartości parametru  $k$  równanie  $(k+1)x^2 + 2x + 1 = 0$  ma
- dwa rozwiązania przeciwnych znaków?
  - ma dwa różne pierwiastki ujemne?
22. Wykonaj dzielenie wielomianów:
- $(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x - 2) : (x + 2)$
  - $(6x^3 + 13x^2 + 4x - 3) : (2x + 3)$
  - $(x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x + 2) : (x^2 + 3x + 1)$
  - $(-4x^3 - 7x^2 + 5x + 9) : (x + 2)$
23. Wykaż, że liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$
24. Wykaż, że liczba  $-1$  jest pierwiastkiem potrójnym wielomianu  $W(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$
25. Sprawdź, czy wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $P(x)$
- $W(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4, \quad P(x) = x + 4$
  - $W(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6, \quad P(x) = x - 1$
26. Nie wykonując dzielenia, oblicz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $P(x)$
- $W(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 8, \quad P(x) = x - 1$
  - $W(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 10, \quad P(x) = x - 2$
27. Nie wykonując dzielenia, wykaż, że wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez wielomian  $P(x)$
- $W(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12, \quad P(x) = (x - 2)(x + 3)$
  - $W(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8, \quad P(x) = x^2 + x - 2$
28. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^2 - 4$ , jeżeli wiadomo, że wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez  $x - 2$  daje resztę 11, a przy dzieleniu przez  $x + 2$  daje resztę  $-1$ .
29. Rozwiąż równania:
- $x^4 - 64 = 0$
  - $(x^2 + 3x)^2 - x^2 = 0$
  - $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
  - $x^3 - 5x + 4 = 0$
  - $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$
30. Rozwiąż nierówności:
- $(4x - x^2)(x^2 - 6x + 8) \geq 0$
  - $(x^4 - 16)(x^2 - 5x + 6) < 0$
  - $x^3 + 7x^2 - 2x - 14 \leq 0$
  - $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x > 0$
31. Sporządź wykres i opisz własności funkcji
- $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$
  - $f(x) = \frac{x}{x+1}$

32. Rozwiąż równania:

a)  $\frac{6}{x-1} = \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x+1}$       b)  $\frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

c)  $\frac{2x+1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

33. Rozwiąż nierówności:

a)  $\frac{4-x}{3x+1} \geq 0$

b)  $\frac{1-2x}{x+1} - 1 < \frac{1+x}{1+2x}$

c)  $\frac{x^2+x-2}{x^2+x-12} > 0$

d)  $\left| \frac{x+1}{x-2} \right| > 2$

e)  $\left| \frac{2x+3}{x-2} \right| \leq 1$  f)

Listę opracowała  
*dr Róża Dąbrowska*