

# KURS WYRÓWNAWCZY Z MATEMATYKI

## Lista 5

1. Sporządzić wykresy podanych funkcji. Omówić na podstawie wykresu ich własności.

a)  $f(x) = x^3$ ;    b)  $f(x) = x^{-1}$ ;    c)  $f(x) = x^{-2}$ ;    d)  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ .

2. Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = x^{51}$ . Nie wykonując obliczeń, korzystając tylko z własności funkcji porównać liczby:

a)  $f(-5)$  i  $f(5)$ ;    b)  $f(-3)$  i  $0$ ;    c)  $f(-2)$  i  $f(3)$ ;    d)  $f(3)$  i  $0$ .

3. Funkcja  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = x^{40}$ . Nie wykonując obliczeń, korzystając tylko z własności funkcji porównać liczby:

a)  $f(-4)$  i  $f(4)$ ;    b)  $f(-2)$  i  $0$ ;    c)  $f(3)$  i  $0$ ;    d)  $f(-5)$  i  $f(4)$ .

4. Korzystając z własności funkcji potęgowej rozwiązać nierówności:

a)  $-1 < x^5 < \frac{1}{32}$ ;    b)  $-1 < x^4 < 1$ ;    c)  $-8 < x^3 < 1$ .

5. Rozwiązać układy równań:

a)  $\begin{cases} y = x^6 \\ y = 1 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} y = x^5 \\ y = 32 \end{cases}$     c)  $\begin{cases} y = x^4 \\ y = 16 \end{cases}$

6. Sporządzić wykresy podanych funkcji. Omówić na podstawie wykresu ich własności.

a)  $f(x) = 3^x$ ;    b)  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ;    c)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

7. Sporządzić na jednym rysunku wykresy funkcji  $f(x) = 2^x$  oraz  $f(x) = 3^x$ . Posługując się rysunkiem znajdź zbiór rozwiązań nierówności.

a)  $2^x > 3^x$ ;    b)  $2^x < 3^x$ .

Wiedząc, że  $a > b > 1$  naszkicuj na jednym rysunku krzywe wykładnicze o równaniach  $f(x) = a^x$  oraz  $f(x) = b^x$ .

8. Korzystając tylko z własności funkcji wykładniczej porównać liczby:

a)  $\left(\frac{3}{7}\right)^{1,3}$  i  $\left(\frac{3}{7}\right)^{1,5}$ ;    b)  $(0,6)^{-4}$  i  $(0,6)^5$ ;    c)  $2^3$  i  $2^{-\frac{1}{5}}$ .

9. Do którego z przedziałów:  $(0, 1)$  czy  $(1, \infty)$  należy  $a$ , jeśli prawdziwa jest nierówność

a)  $a^{111} > a^{112}$ ;    b)  $a^{\sqrt{5}} < a^{\sqrt{7}}$ ;    c)  $a^{0,2} < a^{0,3}$ ;    d)  $a^{-\frac{1}{4}} < a^{-\frac{1}{8}}$ .

**10. Rozwiązać równania:**

1)  $2^x = 16$ ;    2)  $(0,1)^x = 0,01$ ;    3)  $25^x = \frac{1}{5}$ ;    4)  $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$ ;  
5)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ ;    6)  $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$ ;    7)  $3^{2x} = 9^{4-x}$ ;    8)  $2^{x^2-x-3} = \frac{1}{2}$ ;  
9)  $5^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{25}$ ;    10)  $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$ ;    11)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0$ ;  
12)  $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$ ;    13)  $25^x \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{x-1} = 625$ ;    14)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3} = \sqrt{\frac{4}{9}}$ .

**11. Rozwiązać nierówności:**

1)  $4^x > 16$ ;    2)  $2^x < 8$ ;    3)  $3^x \geq 27$ ;    4)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ ;    5)  $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 0,04$ ;  
6)  $2^{1-x} > \frac{1}{2}$ ;    7)  $2^{3-6x} > 1$ ;    8)  $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^{2-x} < \left(\frac{5}{6}\right)^{x+4}$ ;    9)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} > 9 \cdot 3^{2x-1}$ ;  
10)  $3 \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{x-1} + 2,4 > 5^{x+1}$ ;    11)  $\frac{1}{27} \cdot 9^{-(x^2-5)} \leq \frac{1}{3}$ ;    12)  $7^x - 9 \cdot 7^{-x} + 8 > 0$ ;  
13)  $2^{2x} - 2^x - 2 \leq 0$ ;    14)  $10 \cdot 2^x - 16 > 4^x$ ;    15)  $(0,6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} < \left(\frac{27}{125}\right)^3$ .

**12. Oblicz:**  $\log_2 8$ ,  $\log_{0,5} 8$ ,  $\log_{\frac{1}{3}} 9$ ,  $\log_{0,3} 0,09$ ,  $\log_5 1$ ,  $\log_7 1$ ,  $\log_7 7$ ,  $\log_3 3^2$ ,  $\log_{\frac{3}{5}} \left(\frac{5}{3}\right)^5$ ,  $2^{\log_2 3}$ ,  $4^{\log_2 5}$ ,  $\log_4 17 - 2 \log_{16} 17$ ,  $\frac{1}{2} \log 100 - \log 2$ ,  $\log 4 + 2 \log 25 - \log \frac{1}{25} + 4 \log 2$ ,  $\ln e^2 + \ln \frac{1}{e^3}$ ,  $\log_6 \sqrt{10} \cdot \log 36$ .

**13. Wiedząc, że  $\log_3 x = a$  obliczyć:**

a)  $\log_9 x$ ;    b)  $\log_{27} x$ ;    c)  $\log_{\frac{1}{3}} x$ ;    d)  $\log_{\frac{1}{81}} x$ .

**14. Wiedząc, że  $\log_6 2 = a$  oraz  $\log_6 5 = b$  obliczyć:**

a)  $\log_2 3 + \log_{36} 5$ ;    b)  $\log_3 2 - 2 \log_{\frac{1}{6}} 5$ ;    c)  $\log_3 5$ .

**15. Porównać liczby:**

a)  $\log_{0,5} 8$  i  $\log_{0,5} 5$ ;    b)  $\log_3 0,1$  i  $\log_3 2$ ;    c)  $\log_{0,1} 0,1$  i  $1$ .

**16. Sporządzić wykresy podanych funkcji.**

a)  $f(x) = \log_2 x$ ;    b)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ;    c)  $f(x) = \log_3 x$ .

**17. Wyznaczyć dziedzinę.**

1)  $f(x) = \log_3(9 - 3x)$ ;    2)  $f(x) = \log_{0,1}(-x)$ ;    3)  $f(x) = \log_7 x^2$ ;  
4)  $f(x) = \log_3(x^2 - 5x)$ ;    5)  $f(x) = \log(x^2 + 1)$ ;    6)  $f(x) = \ln x^3$ .

**18. Rozwiązać równania:**

1)  $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ ;    2)  $\log_{(x+1)} 4 = 2$ ;    3)  $\log_2(x - 1) = 3$ ;    4)  $\log_6 x = \log_6 5 - 1$ ;    5)  $3(\log_8 x)^2 - 2 \cdot \log_8 x - 1 = 0$ ;    6)  $\log_5 x = \log_5 7 + 2$ ;    7)  $\log_2 x = \log_4 5$ ;  
8)  $\log x = 2 - \log 5$ ;    9)  $2 \log x = \log(5x - 4)$ ;    10)  $\log_{(x-1)}(x^2 - 5x + 10) = 2$ ;

11)  $\log x^2 = 4 - 3 \log x$ ;      12)  $\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log \frac{1}{2} - \log x$ ;      13)  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ ;  
 14)  $\log(x - 2) - \log(4 - x) = 1 - \log(13 - x)$ ;      15)  $\log_2(x + 2) - \log_2(x - 2) = 1$ ;  
 16)  $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2 - 25) = 0$ .

**19.** Rozwiązać nierówności:

1)  $\log_2 x < \log_2 4$ ;      2)  $\log_3 x > \log_3 4$ ;      3)  $\log_5 x \geq \log_{25} 36$ ;      4)  $\log_7 x < 1$ ;  
 5)  $\log_7 x > -1$       6)  $\log_5(3x - 1) < 1$ ;      7)  $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 5$ ;      8)  $\log_{0,5} x \geq 1$ ;  
 9)  $\log_{\frac{2}{3}} x \leq -1$ ;      10)  $\log_2(x + 2) < 2$ ;      11)  $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) < 2$ ;  
 12)  $\log_{0,1}(3 - x) > 1 + \log_{0,1} 20$ ;      13)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$ ;      14)  $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) > 3$ ;  
 15)  $\log_x(x + 2) < 2$ ;      16)  $\log_{2x}(2 - 3x) < 0$ ;      17)  $\log_x \frac{x^2-3}{x-1} > 1$ .

**Opracowała: Agnieszka Oelke**