KURS WYRÓWNAWCZY Z MATEMATYKI

LISTA 6

1. Sprawdzić prawdziwość następujących tożsamości w dziedzinach określoności:

   a) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$,

   b) $\sin 7\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{7}{2}\alpha + \cos 7\alpha = 1$,

   c) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$,

   d) $\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 4\alpha \cdot \sin\alpha = \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha$,

   e) $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

2. Określić dziedzinę, zbiór wartości oraz naszkicować wykresy następujących funkcji:

   a) $f(x) = \sin x$, b) $f(x) = \cos x$, c) $f(x) = tgx$,

   d) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, e) $f(x) = \sin 3x$, f) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$,

   g) $f(x) = 2\sin\frac{1}{2}x$, h) $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$.

3. Wykazać, że:

   a) funkcja $f(x) = \sin x$ jest nieparzysta i $2\pi-$okresowa,

   b) funkcja $f(x) = \cos x$ jest parzysta i $2\pi-$okresowa.

4. Sporządzić wykresy funkcji:

   a) $f(x) = 1 + 2\sin 4x$,

   b) $f(x) = 1 - \sin^2 x$,

   c) $f(x) = |\sin x| - 1$.

5. Obliczyć $\sin 2x$ oraz $\cos 2x$ wiedząc, że $\cos x = -0,8$ i $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

6. Rozwiązać następujące równania:

   a) $2\sin x = -1$,

   b) $\cos(x - \frac{\pi}{5}) = \frac{1}{2}$,

   c) $-3tg\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$,

   d) $\sin^2\frac{\pi x}{2} + 2\cos\frac{\pi x}{2} - 1 = 0$,

   e) $\sin x + \cos x = 1$,

   f) $3\sin x = 2\cos^2 x$,

   g) $\cos 3x = \cos x$,

   h) $\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x$,

   i) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$,

   j) $\operatorname{ctg} 8x \cdot \operatorname{ctg} 10x = -1$.

7. Dana jest funkcja $f(x) = \cos 2x - \cos x$.

   a) Obliczyć wartość $f(x)$ dla $x = \frac{\pi}{6}$.

   b) Wykazać, że $f(x) = (\cos x - 1)(2\cos x + 1)$.

   c) Rozwiązać równanie $\frac{f(x)}{\cos x} = 0$.

8. Rozwiązać następujące nierówności:

a) $\sin^2 x + \cos^2 x \geqslant 1$,

b) $\cos x < \frac{1}{2}$,

c) $0 \leqslant \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

d) $\sin 2x \geqslant 2$,

e) $\sin x > \cos x$,

f) $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$,

g) $\cos^2 x < \frac{1}{2}$,

h) $|\cos x + 1| \geqslant \frac{1}{2}$,

i) $|\sin 2x| \leqslant \frac{1}{2}$,

i) $2\sin^2 3x + \sin^2 6x < 2$,

k) $\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$.

9. Wyznaczyć dziedzinę, zbiór wartości oraz naszkicować wykresy następujących funkcji:

a) $f(x) = \arcsin x$, b) $f(x) = \arccos x$

c) $f(x) =$arc tg$x$, d) $f(x) =$arc ctg$x$.

10. Obliczyć:

a) $\arcsin 0$, b) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

d) arc tg1, e) arc ctg(-1).

11. Obliczyć długość boku $\overline{AB}$ trójkąta ABC, wiedząc, że:

a) $\left|\overline{BC}\right| = 2$, $\sphericalangle BAC = 30°$, $\sphericalangle ABC = 105°$,

b) $|AC| = 5$, $|BC| = 6$, $\sphericalangle ACB = 60°$.

12. W trójkącie dane są kąty α i β. Znajdż stosunek pola trójkąta do pola koła opisanego na tym trójkącie.

13. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Na krótszym z łuków AB wybrano punkt K. Udowodnij, że

$$\left|\overline{AK}\right| + \left|\overline{BK}\right| = \left|\overline{CK}\right|.$$

14. Dwa boki trójkąta mają długości a, b. Znajdż długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciwko tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku o długości a.

15. Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg o promieniu 2. Oblicz pole czworokąta, jeśli wiadomo, że $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right|$, $\sphericalangle ADC = 120°$ i stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD wynosi 2 : 1.

Listę opracował dr Bogdan Szal