LISTA nr 1

Elementy logiki i teorii mnogości: rachunek zdań, algebra zbiorów, produkt kartezjański zbiorów. Kresy zbiorów.

Zad.1 Wzorując się na schemacie dokończyć zdania:

$(a \le b) \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b), \quad a, b \in R$

a) $(a \ge b) \Leftrightarrow$ ... b) $(a \cdot b=0) \Leftrightarrow$ ... c) $(a \cdot b \ge 0) \Leftrightarrow$... d) $(a \cdot b>0) \Leftrightarrow$ ...
e) $(a \cdot b<0) \Leftrightarrow$ ... f) $(a/b=0) \Leftrightarrow$ ... g) $(a/b<0) \Leftrightarrow$ ... h) $(a/b>0) \Leftrightarrow$ ...

Zad.2 Sprawdzić, które z następujących formuł zdaniowych są tautologiami:

a) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow [\sim p \wedge \sim q]$, c) $p \Rightarrow \{p \Rightarrow [p \Rightarrow (p \Rightarrow p)]\}$,
d) $[p \Rightarrow (\sim p \wedge q)] \Rightarrow q$, e) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [\sim p \vee \sim q]$, f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

Zad.3 Które z następujących zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

a) $\forall \alpha \in R \quad \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$, b) $\sim \exists \alpha \in R \quad \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$,
c) $\forall \alpha \in R \quad \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha$, d) $\forall x \in R \quad \sqrt{x^2} = x$, c) $\exists x \in R \quad \sqrt{x^2} = x$.

Zad.4 Rozwiązać następujące równania i nierówności:

a) $|5x - 4| = 3$, b) $|x^3 - 1| \langle 7$, c) $x^2 - |5x + 6| = 0$,
d) $|x^2 - 5x + 6| = 0$, e) $|x+2| + |x-3| \le 5$, f) $\left|\frac{1}{x+2}\right| \langle \left|\frac{2}{x-1}\right|$.

Zad.5 Wyznaczyć zbiory: $A \cup B, A \cap B, A \cap B', A' \cup B, A \setminus B, (A' \cap B') \cup A$, jeżeli:

a) $A = [3,8)$ i $B = [-2,7)$,
b) $A = (-\infty,4]$ i $B = (-3,2]$,
c) $A = \{x \in R : |x-4| \le 3\}$ i $B = \{x \in R : |x-5| \langle 6\}$,
d) $A = \{x \in N : |x| \le 3\}$ i $B = \{x \in R : |x-4| \rangle 8\}$.

Zad.6 Wyznaczyć iloczyn kartezjański $A \times B$, $B \times A$, jeżeli:

a) $A = \{0,1\}$, $B = \{2,3\}$, b) $A = N$, $B = \{0,1,2\}$, c) $A = [-1,1]$, $B = \{2\}$,
d) $A = [2,4]$, $B = (1,3]$, e) $A = \{x \in N : 1 \le x \le 5\}$, $B = \{y \in R : y \rangle 3\}$.

Zad.7 Przedstawić na płaszczyźnie R^2 zbiory $A \cap B$, $B \setminus A$, jeżeli:

a) $A = \{(x;y) : x + y \rangle 2\}$, $B = \{(x;y) : x^2 + y^2 \le 9\}$,
b) $A = \{(x;y) : x^2 + y < 3\}$, $B = \{(x;y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

Zad.8 Wyznaczyć (o ile istnieją) kresy zbiorów:

a) $A = \left\{x : x = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in N\right\}$, b) $B = \{x : x = t^2 - t, t \in R\}$,

c) $C = \left\{x : x = \frac{t}{t^2 - t}, t \in R\right\}$, d) $D = \left\{x : x = 1 + \frac{1}{n^2}, n \in N\right\}$.

Literatura pomocnicza:
W. Marek, J. Onyszkiewicz, "Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach",
J. Musielak, "Wstęp do matematyki".