Lista nr 3

Macierze, działania na macierzach. Wyznacznik i jego podstawowe własności. Macierz odwrotna. Układy równań liniowych: wzory Cramera, metoda Gaussa.

Zad. 1 Obliczyć $(A+B)^T$, A^T-B^T, 8A-12B, jeżeli

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zad. 2 Dane są macierze:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykonać działania lub uzasadnić, że nie jest ono wykonalne:
a) $A+B^T$, b) 3A-2B, c) A^TC^2, d) B^TC, e) CA, f) C^TC i CC^T.

Zad. 3 Obliczyć wyznacznik z macierzy:

$$a)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix};\quad b)\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix};\quad c)\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix};\quad d)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$e)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad f)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix};\quad g)\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix};\quad h)\begin{bmatrix} 1+i & 5-4i \\ -3-2i & -8i \end{bmatrix}.$$

Zad. 4 Wyznaczyć macierze odwrotne do danych:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\quad b)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\ (ad-bc\neq 0);\quad c)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix};\quad d)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$e)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix};\quad d)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix};\quad f)\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Zad. 5 Rozwiązać równanie macierzowe:

$$a)\ \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};\quad b)\ X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};\quad c)\ 3X+\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}X.$$

Zad. 6 Znaleźć rząd każdej z następujących macierzy

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{5}{8} \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zad. 7 Dla jakich wartości x rząd macierzy

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \ \textit{jest równy } 3, \quad b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \ \textit{jest mniejszy od } 4.$$

Zad. 8 Zapisać układy równań liniowych $AX = B$ dla następujących macierzy A i B i rozwiązać je:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix};\ \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix};\ \text{c) } A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix};\ \text{e) } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix};\ \text{f) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zad. 9 Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

$$a)\ \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} x + 2y - z - t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - z + t = 3 \end{cases};\quad c)\ \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Zad. 10 W wytwórni montuje się cztery wyroby A, B, C, D z trzech typów detali a, b, c. Wyroby A, B, C, D ważą odpowiednio 60g, 60g, 70g, 90g. Obliczyć, ile ważą poszczególne detale, jeżeli ich liczba w produkowanych wyrobach podana jest w tabeli:

	A	**B**	**C**	**D**
a	**1**	**2**	**1**	**1**
b	**2**	**1**	**1**	**2**
c	**2**	**1**	**3**	**4**

Zad. 11 Wykonanie pewnego pojemnika wymaga wykonania czterech czynności: narysowania formy, wycięcia, złożenia modelu i jego pomalowania. Liczby poszczególnych czynności w kolejnych dniach pracy pewnego pracownika podaje tabela:

	rysowanie	wycinanie	składanie	malowanie
poniedziałek	30	20	10	5
wtorek	20	15	15	10
środa	40	25	20	20
czwartek	30	20	20	20

Obliczyć czas wykonywania poszczególnych czynności, jeżeli w kolejnych dniach łączny czas pracy wynosił odpowiednio 2 h 10 min, 2 h 15 min, 3 h 55 min, 3 h 30 min.

Literatura pomocnicza:

T. Jurlewicz, Z. Skoczylas „ Algebra liniowa 1” (przykłady i zadania)
W. Krysicki, L.Włodarski „ Analiza matematyczna w zadaniach” (część pierwsza)
L. Jeśmianowicz, J.Łoś „ Zbiór zadań z algebry”