Funkcje wielu zmiennych

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x,y)=\frac{1}{xy}$

b) $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b},\ a\rangle 0\wedge b\rangle 0$

c) $f(x,y)=\arcsin\frac{2x-3}{x+y}$

d) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$

e) $f(x,y)=\sqrt{x-y}\log\left(xy^2\right)$

2. Wyznaczyć i narysować dziedzinę $f(x,y)=\ln\frac{x^2y^2+2y}{x+y}$ oraz jej poziomicę dla $c=0$

3. Narysować wykresy funkcji:

a) $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

b) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

c) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

d) $z=1+x^2+y^2$

e) $z=4-x^2-y^2$

4. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji:

a) $f(x,y)=2x-xy+y^2$

b) $f(x,y)=\frac{x}{y}$

c) $f(x,y)=x^{\sqrt{y}}$

d) $f(x,y)=xe^{-y}$

e) $f(x,y)=e^{xy}\ln y$

5. Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji złożonej:

a) $z=f(u,v)=\ln\frac{u}{v+1}$, gdzie $u=x\sin y,\ v=x\cos y$

b) $z=f(u,v,w)=\arcsin\frac{u}{v+w}$, gdzie $u=e^{\frac{x}{y}},\ v=x^2+y^2,\ w=2xy$

c) $z=f(x,y)=\frac{x^2}{y}$, gdzie $y=\sqrt{a^2-x^2}$

6. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu:

a) $z = y\ln\left(2 + x^2 y - y^2\right)$ w $(2,1,z_o)$

b) $z = x^y$ w $(2,4,16)$

7. Wyznaczyć różniczki zupełne funkcji:

a) $f(x,y) = \arcsin(xy)$

b) $f(x,y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$

8. Za pomocą różniczki zupełnej obliczyć przybliżone wartości:

a) $\sqrt{(4{,}1)^2 + (2{,}9)^2}$

b) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}99)^2$

c) $\dfrac{(2{,}03)^4}{(3{,}99)^2}$

d) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$

e) $(1{,}94)^2 e^{0{,}12}$

9. Wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ w $P_o(1,2)$ w kierunku prostej $x = 1 + \dfrac{1}{2}t,\ \ y = 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

b) $f(x,y) = arctg(xy)$ w $P_o(3,1)$ w kierunku od tego punktu do punktu $P_1(6,5)$

c) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ w $P_o(1,1)$ w kierunku dwusiecznej I ćwiartki układu współrzędnych

10. Wyznaczyć wersor $\vec{u}$ wskazujący kierunek, w którym $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1) = 0$ dla $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x}$

11. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6xy - 38x + 18y + 20$

b) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

d) $f(x,y) = xe^y$

e) $f(x,y) = \left(2x + y^2\right)e^x$

12. Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji w obszarze

a) $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ w $D = \{(x,y) : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 6\}$

b) $f(x,y) = 2x^2 - y^2$ w $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

13. Liczbę 9 rozłożyć na trzy dodatnie składniki tak, aby ich iloczyn był największy.

14. . Spośród prostopadłościanów o ustalonej długości przekątnej $p = 2\sqrt{3}$ znaleźć ten, który ma największy objętość.