

## LISTA 5

(Ciągi i szeregi liczbowe)

**Zad. 1** Wypisać kilka początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ , którego wyraz ogólny określony jest wzorem:

a)  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ;      b)  $a_n = \frac{n+1}{n}$ ;      c)  $a_n = (-2)^n$ ;      d)  $a_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ .

**Zad. 2.** Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym:

a)  $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ ;      b)  $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ;      c)  $c_n = \sqrt[n]{2} - 1$ ;      d)  $a_n = \frac{3^n}{3^n + 2}$ ;      e)  $a_n = \sqrt{n+2}$ .

**Zad. 3.** Obliczyć granicę ciągu  $(a_n)$  o wyrazie ogólnym:

1)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 7n - 2n}}$ ;      2)  $a_n = \sqrt{4n^2 + 2n - 1} - 2n$ ;      3)  $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n} - 3n$ ;      4)  $a_n = n - \sqrt{n^2 + 2n}$   
5)  $a_n = n \cdot (\sqrt{2n^2 - 1} - 2n)$ ;      6)  $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n$ ;      7)  $a_n = \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$ ;      8)  $a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{3^{n+2}}$   
9)  $a_n = 7^n - 6^n - 5^n$ ;      10)  $a_n = \frac{4 \cdot 3^{2n} - 7}{5 \cdot 9^n + 2}$ ;      11)  $a_n = \frac{1 + 4^n}{3^n + 2}$ ;      12)  $a_n = \frac{\cos n}{n^3}$ ;      13)  $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + \pi^n}$ ;  
14)  $a_n = \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$ ;      15)  $a_n = \frac{\sin^2 n + 4n}{3n - 1}$ ;      16)  $a_n = \sqrt[n]{5^n + 7^n + \cos^2 n}$ ;      17)  $a_n = \sqrt[n]{2^{-n} + 3^{-n} + 6^{-n}}$ ;  
18)  $a_n = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n + 3^n \cdot \sin^2 n}$ ;      19)  $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ ;      20)  $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ ;      21)  $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1}$ ;  
22)  $a_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$ ;      23)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ ;      24)  $a_n = \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$ ;      25)  $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}$ ;      26)  $a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n}$ .

**Zad. 4.** Korzystając z definicji wykazać zbieżność szeregów:

a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ ;      b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ;      c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ .

**Zad. 5.** Sprawdzić, które z następujących szeregów spełniają warunek konieczny zbieżności:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$ ;      b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{100}}$ ;      c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ .

**Zad. 6.** Zbadać zbieżność szeregów:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ ;      2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ ;      3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ ;      4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{n+3}\right)^n$ ;      5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ ;      6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$ ;  
7)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ;      8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}$ ;      9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \sin^2 \frac{1}{n}$ ;      10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n$ ;      11)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$ ;      12)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2}$ ;  
13)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$ ;      14)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$ ;      15)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3 + 1}$ ;      16)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ ;      17)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ;  
18)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-1)!}$ ;      19)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 5^n}{2^n \cdot 3^{n+2}}$ ;      20)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ ;      21)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$ ;      22)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ ;  
23)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \cdot (2n+1)}$ ;      24)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ ;      25)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ ;      26)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$ ;      27)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$ ;  
28)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ ;      29)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ ;      30)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$ ;      31)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)}$ ;      32)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\log n}$ .