Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Podstawy analizy danych

Ćwiczenie 4: Rachunek prawdopodobieństwa

Program ćwiczeń obejmuje następująca zadania:

1. Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych w eksperymencie polegającym na pomiarze napięcia u na wyjściu przetwornika, które może zmieniać się w zakresie od -5 V do $+5$ V.

2. Dealer samochodowy oferuje samochody pewnej marki z następującymi opcjami:

   (a) z automatyczną lub manualną skrzynią biegów;
   (b) z klimatyzacją lub bez niej;
   (c) z jednym z dwóch możliwych radioodtwarzaczy samochodowych;
   (d) w jednym z trzech kolorów karoserii

   Jeśli zbiór zdarzeń elementarnych składa się ze wszystkich możliwych odmian tego samochodu, jaka jest liczba elementów tej przestrzeni?

3. Wypisać wszystkie możliwe zdarzenia losowe dla przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega = \{a, b, c, d\}$.

4. Przestrzenią zdarzeń elementarnych w rzucie monetą ze zliczaniem liczby rzutów potrzebnej do wyrzucenia orła jest $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$. Zdefiniujmy zdarzenia losowe

$$\begin{aligned} A &= \{k : k \text{ jest parzyste}\} \\ B &= \{k : 4 \leq k \leq 7\} \\ C &= \{k : 1 \leq k \leq 10\} \end{aligned}$$

   Określić zdarzenia $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ oraz $\bar{A} \cap B$.

5. Używając aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnić, że $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

6. Używając aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnić, że $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$ jeśli $A \subset B$.

7. Udowodnić, że
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \bar{B}).$$

8. Wiedząc, że $\mathrm{P}(A) = 0.9$, $\mathrm{P}(B) = 0.8$ oraz $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.75$, określić (a) $\mathrm{P}(A \cup B)$, (b) $\mathrm{P}(A \cap \bar{B})$ (*wskazówka:* zob. zad. 7), (c) $\mathrm{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$.

9. Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma postać
$$\Omega = \{a, b, c, d\},$$
   przy czym znane są prawdopodobieństwa $\mathrm{P}(a) = 0.2$, $\mathrm{P}(b) = 0.3$, $\mathrm{P}(c) = 0.4$, $\mathrm{P}(d) = 0.1$. Niech A oznacza zdarzenie losowe $\{a, b\}$, B natomiast – zdarzenie losowe $\{b, c, d\}$. Określić prawdopodobieństwa (a) $\mathrm{P}(A)$, (b) $\mathrm{P}(B)$, (c) $\mathrm{P}(\bar{A})$, (d) $\mathrm{P}(A \cup B)$, (e) $\mathrm{P}(A \cap B)$.

10. W pokoju jest sześć osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej dwie mają urodziny tego samego dnia?

11. Spośród 5 mężczyzn i 10 kobiet losuje się pięcioosobowy komitet.

    (a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że komitet będzie składał się z 2 mężczyzn i 3 kobiet.

    (b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że komitet będzie się składał z samych kobiet.

12. Pokazać, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa, czyli

    (a) $\mathrm{P}(A \mid B) \geq 0$,

    (b) $\mathrm{P}(\Omega \mid B) = 1$,

    (c) $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \mid B) = \mathrm{P}(A_1 \mid B) + \mathrm{P}(A_2 \mid B)$.

13. Rzucamy dwiema kostkami.

    (a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że oba wyniki będą identyczne

    (b) Obliczyć to samo prawdopodobieństwo wiedząc, że suma wyników nie przekracza 3.

14. Wśród 100 układów mikroprocesorowych jest 20 wadliwych. Wybrano dwa układy bez zwracania.

    (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy wylosowany układ będzie wadliwy?

    (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugi wylosowany układ będzie wadliwy o ile wiadomo, że pierwszy był wadliwy?

    (c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że oba wylosowane układy będą wadliwe?

15. Dwóch studentów i dwie studentki idą do kina i zajmują cztery kolejne miejsca w jednym rzędzie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że studentki zajmą dwa ostatnie miejsca?

16. Test laboratoryjny wykrywający pewną chorobę ma następujące statystyki. Niech

    $$\begin{aligned} A &= \text{zdarzenie polegające na tym, że testowana osoba ma chorobę} \\ B &= \text{zdarzenie polegające na tym, że rezultat testu jest pozytywny} \end{aligned}$$

    Wiadomo, że
    $$\mathrm{P}(B \mid A) = 0.99, \quad \mathrm{P}(B \mid \bar{A}) = 0.005$$
    oraz że 0.1% populacji rzeczywiście jest chore. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba jest chora, jeśli wynik testu był pozytywny?

17. W szpitalu jest 100 pacjentów z pewną chorobą. 10 z nich zostało wybranych do zastosowania terapii, która podnosi prawdopodobieństwo wyleczenia z standardowych 50% do 75%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pacjent otrzymał terapię jeśli wiadomo, że wyzdrowiał?

18. Losujemy bez zwracania dwie liczby spośród liczb naturalnych od 1 do 10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga liczba okaże się liczbą 5?

19. Firma produkująca przekaźniki elektryczne ma trzy zakłady wytwarzające odpowiednio 50, 30 i 20% jej produkcji. Prawdopodobieństwo tego, że dany zakład wyprodukuje wadliwy przekaźnik, wynosi odpowiednio 0.02, 0.05 oraz 0.01.

    (a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany przekaźnik wyprodukowany przez tę firmę będzie wadliwy.

(b) Jeśli wybrany losowo przekaźnik okazał się wadliwy, z którego zakładu najprawdopodobniej pochodził?

20. Rzucamy dwiema kostkami. Niech A – zdarzenie polegające na tym, że sumą wyników jest 7, B – zdarzenie polegające na tym, że sumą wyników jest 6, C natomiast – zdarzenie polegające na tym, że wynik na pierwszej kostce to 4. Pokazać, że zdarzenia A i C są niezależne, ale B i C są zależne.

21. Zdarzenia losowe A i B są niezależne. Wiadomo, że $\mathrm{P}(A \cap B) = 0.16$ oraz $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.64$. Znaleźć $\mathrm{P}(A)$ oraz $\mathrm{P}(B)$.