

Podstawy analizy danych

## Ćwiczenie 5: Zmienne losowe dyskretne

Program ćwiczeń obejmuje następująca zadania:

1. Rozważmy eksperyment polegający na rzucaniu rzetelną kostką sześciocianową. Niech  $X$  – zmienna losowa przyjmująca wartość 1, gdy wyrzuci się parzystą liczbę oczek, oraz 0, gdy liczba oczek jest nieparzysta.
  - (a) Jaki jest zbiór wartości zmiennej  $X$ ?
  - (b) Określić  $P(X = 1)$  oraz  $P(X = 0)$ .
2. Pewne źródło informacji generuje losowo symbole z czteroliterowego alfabetu  $\{a, b, c, d\}$  z prawdopodobieństwami  $P(a) = \frac{1}{2}$ ,  $P(b) = \frac{1}{4}$ ,  $P(c) = P(d) = \frac{1}{8}$ . System kodujący zakodowuje następnie te symbole w kody binarne w następujący sposób:

$a$	0
$b$	10
$c$	110
$d$	111

Niech  $X$  – zmienna losowa oznaczająca długość kodu, tzn. liczbę symboli binarnych (bitów).

- (a) Jaki jest zbiór wartości  $X$ ?
  - (b) Zakładając, że generowanie pojedynczych symboli jest niezależne od siebie, znaleźć  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$ ,  $P(X = 3)$ ,  $P(X > 3)$ .
3. Rozważmy eksperyment związany z grą w darta: rzucamy lotką do tarczy w kształcie koła o promieniu jednostkowym. Niech  $X$  – zmienna losowa reprezentująca odległość punktu, w którym wylądzuje lotka, od środka tarczy. Zakładając, że lotka zawsze wylądzuje na tarczy i że każdy punkt tarczy ma identyczną szansę na trafienie, odpowiedzieć na pytania:
    - (a) Jaki jest zbiór wartości  $X$ ?
    - (b) Znaleźć  $P(X < a)$  oraz  $P(a < X < b)$ , gdzie:  $a < b \leq 1$ .
  4. Zmienna losowa  $X$  ma następujący rozkład:

$$p_X(1) = \frac{1}{2}, \quad p_X(2) = \frac{1}{4}, \quad p_X(3) = \frac{1}{8}, \quad p_X(4) = \frac{1}{8}.$$

Znaleźć  $P(X \leq 1)$ ,  $P(1 < X \leq 3)$  oraz  $P(1 \leq X \leq 3)$ .

5. Sprawdzić, że funkcja  $p(x)$  zdefiniowana przez

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^x & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

jest rozkładem dyskretnej zmiennej losowej. Oznaczając tę zmienną jako  $X$ , określić  $P(X = 2)$ ,  $P(X \leq 2)$  oraz  $P(X \geq 1)$ .

6. W loterii możemy wygrać główną nagrodę 5000 zł oraz drugą nagrodę 2000 zł z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.001 oraz 0.003. Jaki cena losu w tej loterii mogłaby być uznana za uczciwą (*Wskazówka:* będzie to oczekiwana wartość wygranej).

7. Rozkład zmiennej losowej  $X$  jest następujący:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

(a) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję  $X$ .

(b) Powtórzyć powyższe dla rozkładu

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = -2, 0, 2 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

8. Obliczyć  $E[X]$ ,  $E[X^2]$  oraz  $E[(X - E[X])^2]$  dla zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie

$x$	8	12	16	20	24
$p_X(x)$	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

9. Kontrola jakości wybiera na linii produkcyjnej 5 sztuk pewnego produktu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie sztuki będą wadliwe jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo natrafienia na sztukę wadliwą wynosi 0.05?

10. Student losowo zgaduje odpowiedzi testu, który ma 10 pytań (każde pytanie ma cztery możliwe odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawidłowa). Jakie jest prawdopodobieństwo, że zgadnie prawidłowe odpowiedzi do mniej niż trzech pytań? Jaka jest wartość oczekiwana liczby prawidłowych odpowiedzi?

11. Liczba połączeń telefonicznych przychodzących do centrali telefonicznej w ciągu 10 minut ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda = 2$ .

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tym okresie nie będzie w ogóle połączeń.

(b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 10 minut będą więcej niż 3 połączenia.

12. W pewnym przedsiębiorstwie zatrudniającym 60 pracowników pracuje 14 kobiet. W lipcu ubiegłego roku 20 pracowników dostało awans. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie tej znalazły się przynajmniej dwie kobiety?

13. Prawdopodobieństwo, że noworodek jest chłopcem jest równe 0.52. Jaki jest rozkład liczby chłopców wśród 50 noworodków? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich jest równa liczba chłopców i dziewczynek?

14. Student zostaje zarejestrowany na następny semestr, o ile zaliczy co najmniej  $n - 2$  przedmioty spośród  $n$  ( $n > 2$ ) obowiązujących na danym semestrze. Zakładamy, że poszczególne zaliczenia przebiegają niezależnie od siebie, a prawdopodobieństwo niezaliczenia jest równe 0.1. Znaleźć prawdopodobieństwo, że student zostanie zarejestrowany na następny semestr.

15. Załóżmy, że idziesz na przyjęcie, na którym jest 500 gości (włącznie z Tobą). Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jeden inny gość ma urodziny tego samego dnia roku, co Ty? Oblicz tę wartość dokładnie i w sposób przybliżony – z zastosowaniem rozkładu Poissona (założyć, że rok nie jest przestępny).

16. Prawdopodobieństwo, że kompania paliwowa dokonująca poszukiwań ropy trafi na złożę, wynosi 0.2. Załóżmy, że planuje ona przeprowadzenie serii wierceń. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trafi na złożę w piątym wierceniu?