Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Uniwersytet Zielonogórski

Podstawy analizy danych

Ćwiczenie 6: Rozkłady wielu zmiennych losowych

Program ćwiczeń obejmuje następująca zadania:

1. Rzucamy dwoma rzetelnymi kostkami. Niech $X = 0$ lub 1 zależnie od tego, czy na pierwszej kostce pojawiła się odpowiednio parzysta lub nieparzysta liczba oczek. Podobnie definuje się zmienną losową Y dla drugiej kostki. Znaleźć łączny rozkład X i Y.

2. Pojedyncze bity przesyła się zaszumionym kanałem informacyjnym. Niech X oznacza bit wysyłany na wejściu kanału, a Y – ten sam bit odebrany na wyjściu kanału. Mamy $\mathrm{P}(X = 0) = 0.5$, $\mathrm{P}(Y = 1 \mid X = 0) = 0.1$ oraz $\mathrm{P}(Y = 0 \mid X = 1) = 0.2$.
   (a) Określić łączny rozkład X i Y.
   (b) Określić brzegowe rozkłady X i Y.
   (c) Czy X i Y są niezależne?
   (d) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję X.
   (e) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję Y.
   (f) Obliczyć kowariancję X i Y.
   (g) Obliczyć współczynnik korelacji X i Y.

3. Rozkład łączny zmiennych losowych X i Y jest następujący:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{jeśli } (x, y) = (0, 1),\ (1, 0),\ (2, 1), \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

   (a) Czy zmienne X i Y są niezależne?
   (b) Czy zmienne X i Y są nieskorelowane?

4. Rozważmy eksperyment polegający na wyciąganiu trzech kul z urny zawierającej dwie kule czerwone, trzy białe i cztery niebieskie. Niech X – liczba wyciągniętych kul czerwonych, Y – liczba wyciągnietych kul białych.
   (a) Wyznaczyć łaczny rozkład X i Y.
   (b) Wyznaczyć brzegowe rozkłady X i Y.
   (c) Czy X i Y są niezależne?

5. Łączny rozkład dyskretnych zmiennych losowych X i Y określa wzór

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(2x + y) & \text{dla } x = 1, 2 \text{ oraz } y = 1, 2 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

   gdzie: k – stała.

(a) Obliczyć wartość k.

(b) Znaleźć rozkłady brzegowe X i Y.

(c) Czy zmienne X i Y są niezależne?

(d) Znaleźć rozkłady warunkowe $p_{Y|X}(y \mid x)$ oraz $p_{X|Y}(x \mid y)$

6. Łączny rozkład dyskretnych zmiennych losowych X i Y określa wzór

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^2y & \text{dla } x = 1,2 \text{ oraz } y = 1,2,3 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie: k – stała.

(a) Obliczyć wartość k.

(b) Znaleźć rozkłady brzegowe X i Y.

(c) Czy zmienne X i Y są niezależne?

(d) Znaleźć rozkłady warunkowe $p_{Y|X}(y \mid x)$ oraz $p_{X|Y}(x \mid y)$

7. Rozważmy eksperyment polegający na rzucaniu dwoma monetami trzy razy. Moneta A jest rzetelna, ale taka nie jest moneta B, dla której P(orzeł) $= \frac{1}{4}$ oraz P(reszka) $= \frac{3}{4}$. Niech X – liczba orłów otrzymanych z rzutów monetą A, Y – liczba orłów wynikających z rzutów monetą B.

(a) Znaleźć rozkład łączny X i Y.

(b) Znaleźć rozkłady brzegowe X i Y.

(c) Określić $\mathrm{P}(X = Y)$, $\mathrm{P}(X > Y)$ oraz $\mathrm{P}(X + Y \leq 4)$.