

**Podstawy analizy danych**

## Ćwiczenie 7: Zmienne losowe ciągłe

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład równomierny w przedziale  $[0, 5]$ . Określić jej dystrybuantę oraz obliczyć  $P(2 \leq X \leq 4)$ .

2. W definicji

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ Cx & \text{dla } 0 < x \leq 4, \\ 0 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$$

wyznaczyć wartość  $C$  tak, aby  $f_X$  było prawidłową gęstością prawdopodobieństwa. Podać dystrybuantę odpowiedniej zmiennej losowej  $X$  oraz obliczyć  $P(1 \leq X \leq 2)$ .

3. W firmie produkującej opony zauważono, że rozkład czasu między zejściem z taśmy produkcyjnej dwóch kolejnych opon można opisać za pomocą zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie wykładniczym, z wartością średnią równą 20 sekund ( $E[X] = 20$ ). Obliczyć prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

- (a) czas między zejściem z taśmy dwóch kolejnych opon jest krótszy niż 10 sekund;
- (b) czas między zejściem z taśmy dwóch kolejnych opon jest zawarty w przedziale  $(15, 20)$  sekund;
- (c) czas między zejściem z taśmy dwóch kolejnych opon jest nie krótszy niż 25 sekund.

4. Długość czasu pracy między kolejnymi awariami generatora elektrycznego ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 10 dni. Generator został właśnie naprawiony.

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że generator ulegnie kolejnemu uszkodzeniu w ciągu następnych 14 dni?
- (b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie pracował bezawaryjnie dłużej niż 20 dni?
- (c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przepracuje on więcej niż 5 dni, ale nie dłużej niż 15 dni?

5. Temperatura w pewnym mieście jest modelowana jako zmienna losowa  $T \sim \mathcal{N}(10^\circ, (10^\circ)^2)$ . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że temperatura w losowo wybranej chwili czasu nie przekroczy  $15^\circ$ ?

6. Masa ciała w populacji studentów pewnej uczelni ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(71 \text{ kg}, (12 \text{ kg})^2)$ . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że masa ciała przypadkowo wybranego studenta należy do przedziału  $(60 \text{ kg}, 66 \text{ kg})$ .

7. Mierząc rezystancję  $R$  rezystorów na linii produkcyjnej, akceptujemy jedynie sztuki z zakresu od 96 do 104  $\Omega$ . Określić procent przyjętych jednostek, jeżeli  $R$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(100 \Omega, (2 \Omega)^2)$ .

Tablica 1: **Rozkład normalny:** Wartości funkcji Laplace'a  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ .

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0.00	.500	0.50	.691	1.00	.841	1.50	.933	2.00	.977	2.50	.9938	3.00	.9986
0.05	.520	0.55	.709	1.05	.853	1.55	.939	2.05	.980	2.55	.9946	3.05	.9988
0.10	.540	0.60	.726	1.10	.864	1.60	.945	2.10	.982	2.60	.9954	3.10	.9990
0.15	.560	0.65	.742	1.15	.875	1.65	.951	2.15	.984	2.65	.9960	3.15	.9992
0.20	.579	0.70	.758	1.20	.885	1.70	.955	2.20	.986	2.70	.9966	3.20	.9993
0.25	.599	0.75	.773	1.25	.894	1.75	.960	2.25	.988	2.75	.9970	3.25	.9994
0.30	.618	0.80	.788	1.30	.903	1.80	.964	2.30	.989	2.80	.9974	3.30	.9995
0.35	.637	0.85	.802	1.35	.911	1.85	.968	2.35	.991	2.85	.9978	3.35	.9996
0.40	.655	0.90	.816	1.40	.919	1.90	.971	2.40	.992	2.90	.9982	3.40	.9996
0.45	.674	0.95	.829	1.45	.926	1.95	.974	2.45	.993	2.95	.9984	3.45	.9997

8. Kąt ugięcia belki wspornikowej jest zmienną losową  $X \sim \mathcal{N}(0.08, \sigma^2)$ . Wiedząc, że

$$P(X > 0.11) = 0.067$$

wyznaczyć wartość  $\sigma$ .

9. Rezultaty sprawdzianu punktowano w skali od 0 do 10 punktów. Średnim wynikiem okazało się 6.7 pkt, a odchyleniem standardowym 1.2 pkt. Zakładając, że wyniki miały rozkład normalny, określić (a) procent studentów mających przynajmniej 6 pkt, (b) maksymalny wynik wśród 10% najgorszych rezultatów, (c) najslabszy wynik wśród 10% najlepszych rezultatów.
10. Wzrost dorosłych mężczyzn w Polsce ma rozkład  $\mathcal{N}(175 \text{ cm}, (8 \text{ cm})^2)$ , a wzrost dorosłych kobiet ma rozkład  $\mathcal{N}(165 \text{ cm}, (5 \text{ cm})^2)$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym małżeństwie mężczyzna jest mniej niż 5 cm wyższy od żony?
11. W windach osobowych znajduje się instrukcja informująca, że maksymalne obciążenie to 7 osób lub 500 kg. Zakładając, że waga pasażera ma rozkład  $\mathcal{N}(70 \text{ kg}, (3 \text{ kg})^2)$ , policzyć prawdopodobieństwo, że waga 7 osób przekroczy dopuszczalne obciążenie 500 kg.
12. Z badań wynika, że żywotność pewnego typu opony ma rozkład  $\mathcal{N}(90\,000 \text{ km}, (10\,000 \text{ km})^2)$ .
- Znaleźć prawdopodobieństwo, że losowo kupiona opona będzie miała żywotność 95 000 km lub więcej.
  - Zakupiono 5 opon. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich łączna żywotność wyniesie 400 000 km lub więcej.