

Laboratorium metod i technik optymalizacji

Metoda najmniejszych kwadratów

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Dane są następujące dane pomiarowe:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

Metodą najmniejszych kwadratów dopasować do nich równanie linii prostej oraz wyznaczyć współczynnik r^2 .

Odp.: $\hat{y} = 0.07142857 + 0.8392857x$, $r^2 = 0.868$.

2. Do danych

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.5	1.7	3.4	5.7	8.4

dopasować równanie postaci $y = ax^b$.

Odp.: $\hat{y} = 0.5x^{1.75}$.

3. Do danych

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

dopasować wielomian drugiego stopnia. Wyznaczyć współczynnik r^2 .

Odp.: $\hat{y} = 2.47857 + 2.35929x + 1.86071x^2$, $r^2 = 0.99851$.

4. Do danych

x_1	x_2	y
0	0	5
2	1	10
2.5	2	9
1	3	0
4	6	3
7	2	27

dopasować model postaci $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$.

Odp.: $\hat{y} = 5 + 4x_1 - 3x_2$.

5. Do danych

x_i	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
y_i	0.28	0.57	0.68	0.74	0.79

dopasować model $y = a_0(1 - e^{-a_1x})$.

Odp.: $\hat{a}_0 = 0.7286$, $\hat{a}_1 = 1.5019$.

6. Skoczek skacze ze spadochronem z balonu napełnionego gorącym powietrzem. Tabela przedstawia jego prędkości [m/s] w kolejnych chwilach czasu [s]:

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_i	10	16.3	23	27.5	31	35.6	39	41.5	42.9	45	46	45.5	46	49	50

Dopasować do tych danych modele

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{(-c/m)t}\right)$$

oraz

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(\frac{t}{3.75 + t}\right)$$

gdzie: g – stała grawitacji (9.8 m/s^2), m – masa skoczka (68.1 kg), c – współczynnik oporu powietrza (12.5 kg/s). Który z tych modeli jest dokładniejszy?

7. Spektroskop zmierzył intensywność odbieranego sygnału dla różnych długości fali. Wyniki przedstawia tabela:

x_i	y_i	x_i	y_i
0	25059	8	295849
1	34459	9	273272
2	56923	10	225068
3	109885	11	171780
4	152544	12	126180
5	198619	13	70684
6	256505	14	43297
7	289850	15	25515

Dopasować do tych danych model

$$y = k_1 e^{k_2(x-k_3)^2}$$

(a) doprowadzając sytuację do przypadku regresji liniowej, (b) stosując bezpośrednio metody regresji nieliniowej. Porównać jakość dopasowania z zastosowaniem wykresu. Jakiej długości fali odpowiada maksimum sygnału?

Zadanie powtórzyć dla danych

x_i	y_i	x_i	y_i
0	569322	8	150058
1	647595	9	81671
2	871287	10	57118
3	904318	11	32746
4	820139	12	25717
5	700099	13	17639
6	434252	14	13063
7	216687	15	11527

Wytłumaczyć istotną różnicę między rezultatami otrzymanymi w punktach (a) i (b).