Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Politechnika Zielonogórska

**Metody i techniki optymalizacji**

# Warunki optymalności dla zadań bez ograniczeń

Na stronie internetowej odpowiadającej części *Wykłady* odnaleźć pliki `newton1D.m` oraz `newtonND.m` będące matlabowymi implementacjami metody Newtona odpowiednio dla funkcji jednej i wielu zmiennych (przykładowe skrypty z ich wywołaniami to `script_newton1D.m` i `script_newtonND.m`); zwrócić uwagę na to jak podaje się informajcę o minimalizowanych funkcjach (w przypadku wielowymiarowym potrzebne są jeszcze pliki `fun.m`, `grad.m` oraz `hessian.m`).

Program ćwiczenia obejmuje następujące zadania:

1. Z zastosowaniem procedury `newton1D` określić minimum funkcji $f(x) = x^2/2 - \sin x$ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Jako punkt startowy wybrać $x = 0.5$. Co otrzymuje się po zmianie punktu startowego? Narysować wykresy charakteryzujące zbieżność metody (wartości $x$ i $f(x)$ względem liczby wykonanych iteracji). Wykonać to samo dla funkcji $y = \sin x$.

   W podobny sposób przeanalizować pracę algorytmu dla funkcji $y = x \operatorname{arc\,tg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$, badając szczególnie wrażliwość na zmianę punktu startowego. Wyjaśnić dziwne zachowanie metody gdy np. $x^0 = 1.5$.

2. **(Zadanie dla fanów)** Funkcja

   $$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{77\,x^4}{240} + \frac{71\,x^3}{360} - \frac{7\,x^2}{120} + \frac{x}{120}$$

   posiada cztery ekstrema w przedziale $[0; 1]$; zauważyć, że

   $$f'(x) = (x - 1/2)\,(x - 1/3)\,(x - 1/4)\,(x - 1/5)\,.$$

   Przedstawić na wykresie zależność punktu ekstremum, do którego jest zbieżna metoda Newtona, od punktu startowego (założyć, że punkty startowe wybiera się z przedziału $[0; 1]$).

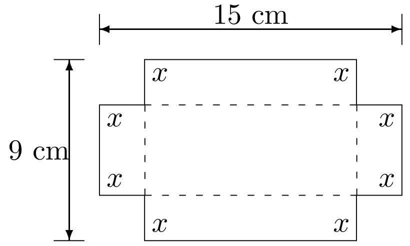
3. Określić punkty minimum i maksimum funkcji (a) $f(x) = x(x-1)^2$ oraz (b) $f(x) = x/(x^2+1)$.

4. Pokazać, że minimalną wartością funkcji $a\cos\theta + b\sin\theta$ jest $-\sqrt{a^2 + b^2}$. Czy można ten rezultat otrzymać bez użycia pochodnych?

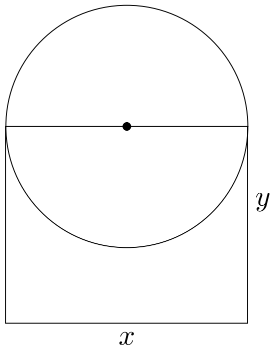
5. Zbadać funkcję $f(x) = x^{2/3} - 1$. Narysować jej wykres. Pokazać, że $f(x)$ posiada minimum w punkcie $x = 0$. Czemu równa jest wartość $f'(x)$ dla $x = 0$? Czy $f'(x)$ zmienia znak przy przejściu $x$ przez zero?

6. Zbadać funkcję $f(x) = |x|$. Znaleźć jej minimum. Co można powiedzieć o zachowaniu się $f'(x)$ w punkcie minimum?

7. Znaleźć minimum funkcji $e^{-x} - \cos x$.




Rysunek 1: Szablon pudełka z zadania 9.




Rysunek 2: Okno z zadania 10.

8. Wyznaczyć punkty stacjonarne funkcji $f(x) = x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 17x$.

9. Z kartonu o rozmiarach podanych na rys. 1 należy wyciąć pudełko o maksymalnej objętości. Określić optymalne rozmiary pudełka.

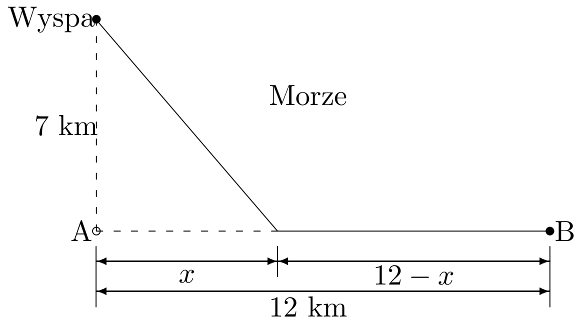
10. Architekt ma zaprojektować okno o kształcie przedstawionym na rys. 2 w taki sposób, że jego obwód wynosi 12 m, a powierzchnia jest maksymalna. Określić optymalne rozmiary okna.

11. Należy położyć kabel telefoniczny łączący wyspę z nadmorskim miastem B (rys. 3). Linia łącząca punkty A i B odpowiada brzegowi morskiemu. Położenie 1 km kabla wzdłuż brzegu kosztuje 6000 PLN, a 1 km pod wodą – 9000 PLN. Określić najtańszy sposób połączenia wyspy z miastem B.

12. Dana jest zmienna losowa $X$. Znaleźć liczbę $a$, dla której wartość oczekiwana zmiennej losowej $|X - a|^2$ jest najmniejsza.

13. Udowodnić, że warunki wystarczające optymalności

$$\nabla f(x^\star) = 0, \quad \nabla^2 f(x^\star) > 0$$




Rysunek 3: Kabel telefoniczny z zad. 11.

są w przypadku funkcji dwóch zmiennych równoważne zestawowi warunków

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^\star, x_2^\star) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^\star, x_2^\star) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1^\star, x_2^\star) > 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1^\star, x_2^\star)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1^\star, x_2^\star) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^\star, x_2^\star)\right]^2 > 0.$$

14. Stosując warunki optymalności pokazać, że dla wszystkich $x > 0$ zachodzi

$$\frac{1}{x} + x \geqslant 2.$$

15. Bez odwoływania się do warunków optymalności określić punkty minimum globalnego funkcji Rosenbrocka

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1 - x_2^2)^2.$$

Dokonać minimalizacji tej funkcji z zastosowaniem procedury `newton2D` wybierając jako punkty startowe odpowiednio

$$\text{(a)} \quad x^0 = (3, 2), \quad \text{(b)} \quad x^0 = (3, -2), \quad \text{(c)} \quad x^0 = (0.5, 0.2).$$

Wytłumaczyć zachowanie procedury w ostatnim przypadku (*wskazówka:* narysować wykres rozważanej funkcji w obszarze $0.08 \leqslant x_1 \leqslant 0.1$ oraz $-0.01 \leqslant x_2 \leqslant 0.01$).

16. Zbadać punkty stacjonarne funkcji $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

17. Zbadać punkty stacjonarne funkcji $f(x) = -x_1^2 - 6x_2^2 - 23x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 20x_2x_3$.

18. Określić zbiór punktów stacjonarnych funkcji

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \beta x_1 x_2 + x_1 + 2x_2$$

w zależności od parametru $\beta$. Które z nich są minimami globalnymi?

19. Pokazać, że funkcja $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 4)^2 + x_2^2$ ma dwa minima globalne oraz jeden punkt stacjonarny, który nie odpowiada ani minimum, ani maksimum.

20. Znaleźć wszystkie minima lokalne funkcji $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 \cos x_2$.

21. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są dane punkty $y^1, y^2, \ldots, y^m$. Znaleźć punkt $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, dla którego suma kwadratów jego odległości od zadanych punktów jest minimalna.

22. Znaleźć punkt płaszczyzny o równaniu

$$x + 2y + 2z = 4$$

najmniej oddalony od początku układu współrzędnych. Jaka jest ta odległość?

Jak zmieni się rozwiązanie po zamianie powyższej płaszczyzny na płaszczyznę $x = 2$?

23. **(Problem Fermata-Torricelli'ego-Vivianiego)** Mając dany trójkąt na płaszczyźnie, rozważyć zadanie określenia punktu, dla którego suma jego odległości od wierzchołków jest minimalna. Pokazać, że taki punkt jest albo wierzchołkiem trójkąta, albo punktem, z którego każdy bok trójkąta jest widziany pod kątem $120°$.

24. Podać przykłady gładkich (tzn. posiadających pochodne dowolnego rzędu) funkcji jednej lub dwóch zmiennych, które spełniają poniższe warunki odnośnie ekstremów bez ograniczeń:

    (a) Minimum i maksimum globalne jest osiągane w nieskończonej liczbie punktów.

    (b) Funkcja jest ograniczona i posiada maksimum globalne, jednak minimum globalne nie jest osiągane.

    (c) Funkcja jest ograniczona, jednak nie posiada maksimum i minimum globalnego.

    (d) Funkcja jest ograniczona i posiada punkty stacjonarne, jednak minimum i maksimum globalne nie są osiągane.

    (e) Funkcja jest ograniczona i posiada zarówno minima, jak i maksima lokalne, jednak nie posiada maksimum i minimum globalnego.

    (f) Jest tylko jedno ekstremum lokalne, które nie jest ekstremum globalnym.

    (g) Jest nieskończenie wiele punktów maksimum lokalnego, ale ani jednego punktu minimum lokalnego.

25. Firma produkuje dwa rodzaje lodów A i B. Koszt produkcji jednej szuki A wynosi \$0.20, a jednej sztuki B — \$0.25. Popyt na lody określają zależności

$$D_A(a,b) = \frac{10\,000}{a^2 b} \quad \text{(dla A)}, \qquad D_B(a,b) = \frac{50\,000}{ab^2} \quad \text{(dla B)}$$

gdzie $a$ jest ceną 1 szt. A oraz $b$ jest ceną 1 szt. B.

Określić cenę lodów maksymalizującą zysk firmy.

26. Firma produkuje dwa produkty. Zależności popytów na nie $x$ i $y$ od cen $p_1$ i $p_2$ mają odpowiednio postać

$$x = 40 - 2p_1 + p_2$$
$$y = 25 + p_1 - p_2$$

Koszt produkcji opisuje zależność

$$K(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

Określić wartośći $x$ i $y$ maksymalizujące zysk firmy.

27. W trakcie pewnego eksperymentu badano wpływ zastosowania dwóch nawozów sztucznych A i B na wielkość plonów pszenicy. Otrzymano w ten sposób zależność

$$V(x, y) = 10x + 5y + 2x^2 + y^2 - 8xy + 10$$

gdzie $x$ oznacza ilość A (w pewnych jednostkach), $y$ — ilość $B$, a $V$ — plon z jednostki powierzchni. Jakie ilości nawozów prowadzą do maksymalnego plonu?