Instytut Sterowania i Systemów Informatycznych
Politechnika Zielonogórska

Metody i techniki optymalizacji

Zbiory i funkcje wypukłe

1. Na przykładzie płaszczyzny pokazać, że każdy punkt odcinka łączącego punkty $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ i $x^{(1)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ można zapisać w postaci $x = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}$ dla pewnego $\alpha \in [0,1]$.

2. W poniższych zadaniach należy sprawdzić czy zbiory X są wypukłe.

   (a) $X = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 \leqslant 2,\ 2x_1 - x_2 \geqslant -2,\ x_2 \geqslant 0\}$.
   (b) $X = \{(x_1, x_2) : x_1x_2 > 1,\ x_1 > 0\}$.
   (c) $X = \{(x_1, x_2) : x_2 \leqslant x_1^2\}$.
   (d) $X = \{(x_1, x_2) : x_1x_2 < 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$.
   (e) $X = \{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 \leqslant 2,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$.
   (f) $X = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 \geqslant x_1^2 + x_2^2\}$.
   (g) $X = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2\}$.
   (h) $X = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$.
   (i) $X = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$.
   (j) $X = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{2} + \dfrac{x_3^2}{3} \geqslant 1\right\}$.

3. Sprawdzić czy poniższe funkcje są wypukłe w całej przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

   (a) $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 - x_2 - 2$.
   (b) $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$.
   (c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \cos\dfrac{x_1 - x_2}{2}$.
   (d) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2$.
   (e) $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
   (f) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$.

4. W poniższych zadaniach wskazać zbiory, na których $f(x)$ jest wypukła.

   (a) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{x_2}$.
   (b) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$.
   (c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - \sin(x_1 - x_2)$.

(d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{1}{x_1 + x_2}$.

5. Zadanie dotyczy funkcji kwadratowych postaci

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x.$$

Dla każdej z podanych funkcji utworzyć macierz A , określić gradient $\nabla f(x^{(0)})$ w punkcie $x^{(0)}$, zweryfikować wypukłość i ewentualnie obliczyć punkty minimum.

(a) $f(x) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - x_2, \quad x^{(0)} = (1, 1)$.

(b) $f(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 10x_2^2 + 5x_1 - 3x_2, \quad x^{(0)} = (2, 1)$.

(c) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1 + x_3, \quad x^{(0)} = (1, 0, -1)$.

(d) $f(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 - x_2 - 3x_3, \quad x^{(0)} = (1, 2, 3)$.

6. Dla jakich wartości a, b i c funkcja $f(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ jest wypukła w $\mathbb{R}^2$?

7. Dla jakich wartości a funkcja $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_1x_2$ jest wypukła w $\mathbb{R}^3$?

8. **(Zadanie obowiązkowe!)** Pokazać, że jeśli funkcje $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ są wypukłe na zbiorze wypukłym X, to funkcja

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

gdzie $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, jest również wypukła.

9. **(Również zadanie obowiązkowe!)** Udowodnić, że jeśli funkcje g_i, $i = 1, \ldots, m$ są wypukłe, to zbiór

$$X = \{x : g_i(x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

jest wypukły. Czy ten rezultat może być pomocny w rozwiązaniu zadania 1?