

Metody i techniki optymalizacji

Elementy programowania liniowego

Poniższe zadania należy rozwiązać z zastosowaniem programów Excel oraz Lindo i Lingo.

1. Firma produkuje dwa produkty A i B, których rynek zbytu jest nieograniczony. Każdy z produktów wymaga obróbki na każdej z maszyn I, II, III. Czasy obróbki (w godzinach) dla każdego z produktów są następujące:

	I	II	III
A	0.5	0.4	0.2
B	0.25	0.3	0.4

Tygodniowy czas pracy maszyn I, II, III wynosi odpowiednio 40, 36 i 36 godzin. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki A i B stanowi odpowiednio 5 i 3\$.

Określić tygodniowe normy produkcji wyrobów A i B maksymalizujące zysk.

2. Firma potrzebuje węgiel z zawartością fosforu nie większą niż 0.03% i zawartością cynku nie większą niż 3.25%. Dostępne są trzy gatunki węgla A, B i C po następujących cenach za tonę:

Gatunek węgla	Zaw. P [%]	Zaw. Zn [%]	Cena [\$]
A	0.06	2.0	30
B	0.04	4.0	30
C	0.02	3.0	45

Jak należy je zmieszać, aby otrzymać najniższą cenę i jednocześnie spełnić ograniczenia na zawartość zanieczyszczeń? Zadanie rozwiązać metodą graficzną.

3. Środki do czyszczenia podłóg ocenia się na podstawie trzech wskaźników: a) własności czyszczących, b) własności dezynfekujących, c) drażniącego działania na skórę. Każdy z tych wskaźników ocenia się w skali liniowej od 0 do 100 jednostek.

Produkt wypuszczany na rynek powinien mieć w skrajnym przypadku 60 jednostek własności czyszczących i 60 jednostek własności dezynfekujących w odpowiednich skalach. Jednocześnie działanie podrażniające skórę powinno być minimalne. Końcowy produkt powinien być mieszanką trzech podstawowych środków czyszczących o własnościach przedstawionych w tabeli:

Środek	Dział. czyszczące	Dział. dezynfekujące	Dział. podrażniające
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Sformułować zadanie znajdowania optymalnej mieszanki jako zadanie programowania liniowego.

4. Firma produkuje dwa produkty A i B, sprzedawane odpowiednio po 8 i 15 centów za opakowanie. Rynek zbytu dla każdego z nich jest praktycznie nieograniczony. Produkt A wytwarza się na maszynie 1, a produkt B — na maszynie 2. Następnie oba produkty pakuje się w fabryce.

1 kg surowca kosztuje 6 centów. Maszyna 1 przetwarza 5000 kg w godzinę ze stratami 10%. Maszyna 2 obrabia 4000 kg/h ze stratami 20%. Maszyna 1 jest dostępna przez 6 godzin dziennie, a jej praca kosztuje 288 \$/h. Maszyna 2 jest dostępna przez 5 godzin dziennie, a jej wykorzystanie kosztuje 336 \$/h. Opakowanie produktu A waży 1/4 kg, a opakowanie produktu B — 1/3 kg. Dział dokonujący pakowania może pracować przez 10 h dziennie z kosztami 360 \$/h. W ciągu 1 h można zapakować 12000 szt. A i 8000 szt. B.

Firma chce określić takie wartości x_1 i x_2 zapotrzebowania na surowce do produkcji A i B (w tonach), dla których dzienny zysk będzie maksymalny. Sformułować przedstawiony problem jako ZPL, a następnie rozwiązać go graficznie.

5. W dwóch punktach A i B pewnej miejscowości istnieje zapotrzebowanie na dodatkowy transport. W punkcie A potrzeba 5 dodatkowych autobusów, a w punkcie B — 7. Wiadomo, że 3, 4 i 5 autobusów można otrzymać odpowiednio z garaży G_1 , G_2 i G_3 .

Jak należy rozdzielić te autobusy między punkty A i B, aby zminimalizować ich całkowity przebieg? Odległości z garaży do punktów A i B przedstawia poniższa tabela:

Garaż	Odległość od punktów	
	A	B
G_1	3	4
G_2	1	3
G_3	4	2

6. Fabryka produkuje dwa modele samochodów: droższy A i tańszy B. Zatrudnionych jest w niej 1000 robotników niewykwalifikowanych i 800 wykwalifikowanych, z których każdy pracuje 40 godzin w tygodniu. Do wyprodukowania jednego egzemplarza modelu A potrzeba 30 roboczogodzin pracy niewykwalifikowanej i 50 roboczogodzin pracy wykwalifikowanej; do wyprodukowania jednego egzemplarza modelu B potrzeba odpowiednio 40 i 20 roboczogodzin. Każdy egzemplarz B wymaga wydatków na surowiec i wyposażenie na poziomie 500 \$, podczas gdy każdy egzemplarz A wymaga kosztów rzędu 1500 \$. Całkowite koszty nie powinny przekraczać 900 000 \$ tygodniowo. Pracownicy odprowadzający samochody z fabryki pracują pięć dni w tygodniu i mogą zabrać nie więcej niż 210 maszyn dziennie.

Każdy sprzedany model A przynosi firmie 1000 \$ zysku, a każdy model B — 500 \$ zysku. Jaką wielkość produkcji każdego z modeli jest optymalna? Co można zarekomendować w celu podwyższenia zysku firmy?

7. Firma produkuje trzy produkty A, B i C, przy czym do wytworzenia każdego z nich wymagana jest obróbka na wszystkich czterech stanowiskach I, II, III, IV.

Produkt	Czas obróbki, h				Zysk, \$
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Czas pracy każdego ze stanowisk wynosi odpowiednio 84, 42, 21 i 42 h. Określić które z produktów i w jakich ilościach należy produkować.

8. Producent napojów bezalkoholowych dysponuje dwoma maszynami do rozlewania A i B. Maszyna A jest zaprojektowana dla butelek półlitrowych, a maszyna B — dla litrowych, jednak każda z nich może być wykorzystana do napełniania obu typów butelek, chociaż wiąże się to z pewną utratą efektywności, co przedstawia poniższa tabela:

Maszyna	Liczba butelek produkowanych w ciągu 1 min.	
	Butelki półlitrowe	Butelki litrowe
A	50	20
B	40	30

Każda z maszyn pracuje po 6 h dziennie przez 5 roboczych dni tygodnia. Zysk ze sprzedaży jednej butelki półlitrowej stanowi 4 centy, a od litrowej — 10 centów. Tygodniowa produkcja nie może przekroczyć 50 000 l. Rynek nie przyjmuje więcej niż 44 000 butelek półlitrowych i 30 000 litrowych.

Producent chce zmaksymalizować swój zysk przy dostępnych środkach. Sformułować odpowiednio ZPL i znaleźć optymalne rozwiązanie.

9. Firma reklamuje swoją produkcję za pomocą czterech środków masowego przekazu: telewizji, radia, gazet i plakatów. Na podstawie rozmaitych doświadczeń z przeszłości wiadomo, że te środki prowadzą do zwiększenia zysku odpowiednio o 10, 3, 7 i 4 \$ w przeliczeniu na 1 \$ przeznaczony na reklamę.

Rozdział budżetu na poszczególne środki ograniczono następująco:

- pełny budżet nie powinien przekraczać 500 000 \$;
- należy przeznaczyć nie więcej niż 40 % budżetu na telewizję i nie więcej niż 20 % na plakaty;
- wskutek atrakcyjności radia dla młodzieży należy nań przeznaczyć w skrajnym przypadku połowę tego, co na telewizję.

Sformułować zadanie rozdziału pieniędzy na poszczególne środki jako ZPL i rozwiązać wykorzystując metodę sympleks.

10. Firma zajmuje się zestawianiem diety, zawierającej w skrajnym przypadku 20 jednostek białek, 30 j. węglowodanów, 10 j. tłuszczów i 40 j. witamin. Jak osiągnąć ten cel w najtańszy sposób przy zestawionych w tabeli cenach za 1 kg (lub 1l) pięciu dostępnych produktów?

	Chleb	Soja	Ryba	Owoce	Mleko
Białka	2	12	10	1	2
Węglowodany	12	0	0	4	3
Tłuszcze	1	8	3	0	4
Witaminy	2	2	4	6	2
Cena	12	36	32	18	10

11. Kompania naftowa kupuje ropę naftową ze źródeł W, X, Y i Z, a następnie zajmuje się jej przetworzeniem, produkując trzy rodzaje smarów A, B i C. Istnieje ograniczenie na chłonność rynku dla każdego rodzaju smaru:

Smar	Skład, %	Możliwa ilość do sprzedania [galony]
A	nie mniej niż 10 (W) nie więcej niż 25 (Z)	90 000
B	nie mniej niż 15 (W)	100 000
C	nie mniej niż 20 (X) nie więcej niż 50 (Y)	120 000

Ceny (w jednostkach umownych) za jeden galon surowca i gotowego produktu przedstawiono poniżej

Surowiec				Smar		
X	Y	Z	W	A	B	C
72	60	67	75	90	87	84

Zakładając, że ropa jest dostępna w nieograniczonych ilościach, sformułować zadanie maksymalizacji zysku jako ZPL i znaleźć rozwiązanie optymalne.

12. Fabryka włókiennicza powinna pracować 24 godziny na dobę zgodnie z poniższą tabelą:

Godzina [h]	2-6	6-10	10-14	14-18	18-22	22-02
Minimalna konieczna liczba tkaczy	4	8	10	7	12	4

Każdy z tkaczy powinien pracować 8 godzin bez przerwy. Znaleźć minimalną liczbę tkaczy spełniającą podane warunki.

13. Dziecko w pewnym wieku potrzebuje dziennie co najmniej 120 jednostek witaminy A, 60 jednostek witaminy D, 36 jednostek witaminy C oraz 180 jednostek witaminy E. Witaminy te zawarte są w dwóch produktach P_1 i P_2 . Ze względu na uboczne szkodliwe działanie witaminy A należy dostarczyć jej co najwyżej 240 jednostek. Zawartość poszczególnych witamin w jednostce produktu oraz ceny jednostkowe produktów podaje poniższa tablica.

	P_1	P_2
A	6	3
D	1	3
C	9	1
E	6	6
Cena	120	180

Ile należy zakupić produktu P_1 i P_2 , aby dostarczyć dziecku witamin w wymaganych ilościach przy minimalnym koszcie zakupu produktów P_1 i P_2 ?

14. Kompania kontroluje trzy fabryki F_1 , F_2 i F_3 produkujące 50, 25 i 25 tys. szt. pewnego produktu tygodniowo. Zawarto umowy z czterema odbiorcami C_1 , C_2 , C_3 i C_4 , którzy potrzebują tygodniowo odpowiednio 15, 20, 20 i 30 tys. szt. Koszty produkcji i transportu 1 tys. szt. produktu do odbiorców przedstawiono poniżej:

Fabryka	Odbiorca			
	C_1	C_2	C_3	C_4
F_1	13	17	17	14
F_2	18	16	16	18
F_3	12	14	19	17

Określić minimalny koszt ogólny i wielkości produkcji.

15. Firma zaproponowała właścicielom trzech linii lotniczych przewóz brygad specjalistów do różnych części świata. Koszt przewozu w funtach szterlingach przedstawiono w tabelce:

Linia lotnicza	Sydney	Kalkuta	Bejrut	Dallas	San Paulo
I	24	16	8	10	14
II	21	15	7	12	16
III	23	14	7	14	12

Administracja firmy postanowiła, że kontrakty na przewozy będą zawierane z właścicielami linii I, II, III w stosunku 2:3:2 i powiadomiła o tym kierującego przewozami, a także zakomunikowała, że z 70 wyznaczonych na bieżący rok przewozów 10 jest do Sydney, 15 do Kalkuty, 20 do Bejrutu, 10 do Dallas i 15 do San Paulo.

Jak należy zawrzeć kontrakty, aby zminimalizować koszt przewozów przy ograniczeniach narzuconych przez administrację?

16. Pewien produkt wytwarza się w dwóch zakładach i wysyła do dwóch odbiorców. Ich potrzeby na najbliższe dwa miesiące przedstawiono w tabeli:

Odbiorca	Zapotrzebowanie	
	Sierpień	Wrzesień
1	420	550
2	350	480

Jednostkowy koszt transportu produktu z zakładów do odbiorców określa tabela:

Zakład	Odbiorca	
	1	2
1	10	13
2	12	6

Jednostkowy koszt produkcji (w jednostkach umownych) i wielkość produkcji wg planu na dwa miesiące przedstawiono poniżej:

Zakład	Koszt produkcji, j.u.		Wielkość	
	Sierpień	Wrzesień	Sierpień	Wrzesień
1	3.0	3.6	500	600
2	3.2	2.9	300	500

Produkt można przechowywać przez okres miesiąca i dopiero wtedy wysłać go do odbiorcy. Koszt magazynowania wynosi 0.5 w pierwszym zakładzie i 0.6 w drugim. Określić optymalne plany produkcji i plany dostaw traktując zagadnienie jako transportowe.

17. Firma przewozowa powinna w ciągu tego samego dnia pobrać pięć towarów w punktach A, B, C, D, E i dostarczyć je odpowiednio do punktów a, b, c, d, e . Odległości (w km) między punktami załadunku i punktami przeznaczenia są następujące:

$A-a$	$B-b$	$C-c$	$D-d$	$E-e$
60	30	100	50	40

Firma dysponuje pięcioma ciężarówkami dwóch typów X i Y w punktach S, T, U, V, W (typy ciężarówek: X w S, Y w T, X w U, X w V i Y w W).

Ciężarówki typu X są nowsze o ekonomiczniejsze od ciężarówek typu Y. Koszty przejazdu jednego kilometra (w centach) dla ciężarówek obu typów (włączając paliwo, ubezpieczenie, konserwację, itd.) są następujące:

	<i>Pusta</i>	<i>Załadowana</i>
X	20	40
Y	30	60

Odległości od garaży do punktów przeznaczenia przedstawia tabela:

	A	B	C	D	E
S	30	20	40	10	20
T	30	10	30	20	30
U	40	10	10	40	10
V	20	20	40	20	30
W	30	20	10	30	40

Przydzielić zadania kierowcom ciężarówek tak, aby zminimalizować koszty. Założyć, że wszystkie ładunki mają w przybliżeniu jednakowy rozmiar i wymagają jednakowej pracy przy pakowaniu, ułożeniu, itd.

18. W systemie radarowym przeznaczonym do automatycznego śledzenia obiektów powietrznych przeprowadza się obliczenia określające względną wiarygodność tego, że dany sygnał odbity odpowiada któremuś z obserwowanych obiektów. Rezultaty przedstawia tabela:

Sygnał odbity	Obiekt			
	1	2	3	4
1	0.79	0.20	0.50	0.315
2	0.63	0.40	0.20	0.50
3	0.40	0.20	0.16	0.50
4	0.50	0.20	0.125	0.25

Zakładając, że celem jest skojarzenie sygnałów odbitych z obiektami w taki sposób, aby zmaksymalizować iloczyn wiarygodności, sprowadzić zadanie do pewnego problemu przydziału, a następnie rozwiązać go dla przedstawionych danych.

19. Linia lotnicza obsługuje trzy miasta A, B, C. Przeloty odbywają się w ciągu dnia przez siedem dni tygodnia. Koszt postoju samolotu we wszystkich trzech portach lotniczych wynosi kT^2 , gdzie T oznacza czas postoju. Jak należy przydzielić samoloty poszczególnym liniom aby zminimalizować koszty? Należy uwzględnić, że samolot nie może wystartować wcześniej niż jedną godzinę po wylądowaniu, gdyż w tym czasie dokonuje się kontroli technicznej i przeprowadza przygotowania do startu.

Wylot		Przybycie	
Miasto	Godzina	Miasto	Godzina
A	8:00	B	12:00
A	9:00	C	12:00
A	10:00	B	14:00
A	14:00	B	18:00
A	18:00	B	22:00
A	20:00	C	23:00
B	7:00	A	11:00
B	9:00	A	13:00
B	13:00	A	17:00
B	18:00	A	22:00
C	9:00	A	12:00
C	15:00	A	18:00

20. Kłody o długości 5,6 m są cięte w tartaku na kawałki 1,2 m, 1,6 i 1,9 m. Tartak ma wykonać dzienny plan produkcji, który zakłada oddanie 200 kłód o długości 1,2 m, 300 kłód o długości 1,6 m oraz 100 kłód o długości 1,9 m. W jaki sposób należy pociąć kłody, aby z jednej strony wykonać plan, z drugiej zaś uzyskać jak najmniej odpadu? Za odpad przyjmuje się kawałki drewna krótsze niż 1,2 m. Zbudować model matematyczny tego zagadnienia.
21. Trzech importerów – hurtowników H_1, H_2, H_3 zaopatruje co 3 dni w banany cztery sklepy S_1, S_2, S_3, S_4 . W czasie transportu część bananów ulega zepsuciu. Procentowy poziom ubytku bananów, zależny od czasu trwania transportu, ofertę (podaż) dostawców A_i oraz zgłaszane zapotrzebowanie sklepów B_j w kg zawiera poniższa tabela:

Dostawcy	Odbiorcy				A_i
	S_1	S_2	S_3	S_4	
H_1	2,0	3,0	4,0	1,0	2200
H_2	5,0	7,0	3,0	2,0	2000
H_3	1,0	4,0	8,0	3,0	2800
B_j	1500	1400	2600	1500	

Jak sformułować zadanie doboru takiego planu dostaw, który zapewni minimalizację ilości zepsutych bananów?

22. Na początku dnia roboczego z parku autobusów wyjeżdża na linię x_1 maszyn, po godzinie dochodzi do nich następne x_2 autobusów, a po następnej godzinie – dodatkowo x_3 autobusów. Każdy autobus kursuje po trasie bez przerwy przez 8 godzin. Minimalna konieczna liczba maszyn na linii w i -tej godzinie dnia pracy ($i = 1, 2, \dots, 10$) wynosi b_i . Przekroczenie tej liczby prowadzi do dodatkowych kosztów w ciągu i -tej godziny w wielkości c_i zł na każdy dodatkowy autobus.
- Sformułować matematycznie zadanie określenia liczby maszyn x_1 , x_2 oraz x_3 wyjeżdżających na linię w pierwszych godzinach dnia roboczego, tak aby dodatkowe koszty w ciągu całego dnia były minimalne.
23. W wydziale pewnego zakładu znajduje się 100 obrabiarek typu T_1 oraz 200 obrabiarek typu T_2 , a na każdej z nich można wytwarzać detale A_1 i A_2 . Wydajność obrabiarek w ciągu doby, zysk z jednego detalu i minimalny dobowy plan produkcji przedstawia poniższa tabela.

Rodzaj detalu	Wydajność szt./dobę		Zysk z 1 szt. zł	Minimalny plan dobowy szt.
	T_1	T_2		
A_1	20	15	6	1510
A_2	35	30	4	4500

- Sformułować zadanie określenia liczby x_{ij} obrabiarek typu T_i , $i = 1, 2$, które należy przeznaczyć do produkcji detali A_j , $j = 1, 2$ w taki sposób, aby zysk był maksymalny.
24. Zakład wytwarza dwa produkty A_1 i A_2 wykorzystując surowiec, którego zapas wynosi b ton. Zgodnie z planem, produkcja A_1 powinna stanowić co najmniej 60 % całej produkcji zakładu. Zużycie surowca na wytworzenie 1 tony produktu A_1 i A_2 wynosi odpowiednio a_1 i a_2 . Cena 1 tony gotowego produktu A_1 i A_2 wynosi odpowiednio c_1 i c_2 zł.
- Sformułować ZPL maksymalizujące zysk zakładu.
 - Zapisać je w postaci standardowej.
 - Zapisać otrzymaną postać standardową stosując zapis macierzowy.