

Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 1b.

Ciągi i szeregi funkcyjne. Zbieżność jednostajna i punktowa. Szeregi potęgowe.

1. Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego $f_n(x) = \frac{nx^3+x}{n}$ dla $x \in R$.
2. Zbadać zbieżność ciągu funkcyjnego $g_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ dla $x \in (0, 1)$.
3. Wykazać, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = x + \frac{(-1)^n x}{n}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x) = x$ na przedziale $[-3, 3]$.
4. Wykazać, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctg(nx)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x) = 0$ w R .
5. Wykazać, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2}$ nie jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[0, 1]$.
6. Korzystając z kryterium Weierstrassa zbadać jednostajną i bezwzględną zbieżność następujących szeregów funkcyjnych na wskazanym przedziale:
 - a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in [-2, 2]$;
 - b. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in [-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$;
 - c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in [\alpha, \infty)$; $\alpha > 0$;
 - d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3+x^2}$, $x \in R$.
7. Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:
 - a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$;
 - b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n+1)^{2 \cdot 2^n}}$;
 - c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x+2)^n$.
8. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i ustalić przedziały ich zbieżności:
 - a. $f(x) = \frac{3}{1+x-2x^2}$; b. $g(x) = \cos^2 x$; c. $h(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$.