Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 2.

Funkcje wielu zmiennych.

1. Wyznaczyć i narysować dziedziny funkcji:

a. $f(x,y) = \sqrt{x \sin y}$; b. $g(x,y) = \arcsin \sqrt{y - \sqrt{x}}$.

2. Znaleźć poziomice wykresów funkcji:

a. $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$; b. $g(x,y) = -\sqrt{9 - y^2}$.

3. Obliczyć pochodne cząstkowe I-go rzędu funkcji:

a. $f(x,y) = x\sqrt{y} - e^x \ln y$; b. $f(x,y,z) = \sin x^2 (\operatorname{tg} y) - e^{\sin z} \cos^2 y$;

c. $f(x,y) = x\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{x}}$; d. $f(x,y,z) = \sqrt{x^4 + \cos^2 y} + e^{\sqrt{z}} \sin y$;

e. $f(x,y) = x^{\sqrt{y}}$; f. $f(x,y,z) = z^4 (5xy^2 - 3yz^2)^{20}$.

4. Obliczyć pochodne cząstkowe II-go rzędu funkcji:

a. $f(x,y) = x^4 - x^2 y^2$; b. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$; c. $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$; d. $f(x,y) = y^{\ln x}$;

e. $f(x,y) = e^{2x} \sin(3y)$; f. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$; g. $f(x,t) = \ln \sin(x - 2t)$;

5. Obliczyć :

a. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ dla $z(x,y) = \sin(xy)$; b. u_{xyz} dla $u(x,y,z) = e^{xyz}$.

6. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych fukncji we wskazanych punktach:

a. $z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 2)$;

b. $z = f(x,y) = y \ln 2 + x^2 y - y^2$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, z_0)$.

7. Obliczyć pochodne cząstkowe I-go rzędu funkcji złożonych:

a. $z = f(u,v) = e^{uv}$, gdzie $u = u(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = v(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$;

b. $z = f(u,v,w) = u^2 - v(\sqrt{u} - w)$, gdzie $u = u(x,y) = x^2 y^2$, $v = v(x,y) = \frac{x}{y}$,

$w = w(x,y) = 2x - y$;

c. $F(x) = f(x, y(x)) = x^2 y + x \sin y$, gdzie $y = y(x) = 2e^{3x}$;

d. $F(x) = f(u,v) = \ln(uv)$, gdzie $u = u(x) = x^2 \sin x$, $v = v(x) = x^3 \cos x$;

e. $F(x,y) = f(u) = u^4$, gdzie $u = u(x,y) = x^2 + y^2 \ln x$.

8. Dla funkcji $f(x,y) = x^3y^4 + xe^y$ wyznaczyć:

a. kierunek najszybszego spadku funkcji f w punkcie $(2,1)$;

b. kierunek najszybszego wzrostu funkcji f w punkcie $(1,1)$.

9. Obliczyć gradienty i pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a. $f(x,y) = \sin x \cos y$, $\quad (x_0,y_0) = (0,\pi)$; $\quad \vec{v} = [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$;

b. $f(x,y,z) = \frac{z-x}{z+y}$, $\quad (x_0,y_0,z_0) = (1,0,-3)$; $\quad \vec{v} = [-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}]$;

c. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad (x_0,y_0) = (0,0)$; $\quad \vec{v} = [\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$.

10. Wyznaczyć różniczki zupełne dla funkcji:

a. $f(x,y) = x^3y^2 + 2e^{2x}y - \cos(x^2)$; $\quad$ b. $f(x,y) = e^y \arcsin(xy)$;

c. $f(x,y,z) = e^{xyz} + x^4 \ln y - z$

11. Wyznaczyć różniczkę drugiego rzędu dla funkcji

$$f(x,y) = (2x+3y)^2$$

i obliczyć jej wartość w punkcie $(x_0,y_0) = (1,1)$.

12. Sprawdzić, czy podane wyrażenia są różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x,y)$, jeśli tak wyznaczyć tę funkcję:

a. $3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy$; $\quad$ b. $(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy$;

c. $(x+y)dx + (x-y)dy$; $\quad$ d. $(x-2y)dx + 2(y-x)dy$.

e. $(x^2+y)\,dx - x\,dy$; $\quad$ f. $(x-xy)\,dx + (y+x^2)\,dy$.

13. Napisać wzór Taylora z resztą R_2 dla funkcji $f(x,y) = \sin^2(x+y)$ w otoczeniu punktu $(x_0,y_0) = (\pi,\pi)$.

14. Znaleźć ekstrema lokalne podanych funkcji:

a. $f(x,y) = 3x^2y - 6xy + y^3$; b. $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$;

c. $f(x,y) = x^3 + y^3$; d. $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$; e. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y + 2$;

f. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$; g. $f(x,y) = e^x \sin y$.

15. Wyznaczyć ekstremum warunkowe funkcji $f(x,y) = xy$ przy warunku $x + y = 0$.

16. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x,y)$ w obszarze D:

a. $f(x,y) = x^2y(2-x-y)$,

gdzie D jest trójkątem domkniętym ograniczonym przez proste $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$;

b. $f(x,y) = x + y$, gdzie $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$;

c. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, gdzie $D = [0,2] \times [-1,2]$;

d. $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$,

gdzie D jest trójkątem domkniętym ograniczonym przez proste $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$;

e. $f(x,y) = 2xy$, gdzie $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$;

f. $f(x,y) = x^2 - y^2$, gdzie $D = [0,1] \times [0,1]$.

17. Zbadać, czy równanie $x - \sin y = 0$ określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ na pewnym otoczeniu punktów $A = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$, $B = (1, \frac{\pi}{2})$, $C = (0, 2\pi)$.

18. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $ye^x + xe^y - 2 = 0$ w punkcie $x_0 = 0$.

19. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej postaci $y = y(x)$ określonej równaniem

a. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

b. $x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0$.