

## Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 1.

*Elementy logiki. Rachunek zdań. Rachunek kwantyfikatorów.*

1. Wskazać zdania logiczne i ustalić ich wartość logiczną:

- a.  $\pi$  jest liczbą wymierną.
- b. Podaj mi książkę telefoniczną.
- c. Kraków leży nad Odrą.
- d. Czy romb jest czworokątem?
- e. Każdy ssak jest kręgowcem.
- f. Trapez jest ładną figurą.

2. Wykazać, że następujące formuły są tautologiami:

- a.  $p \Leftrightarrow \sim \sim p$  (prawo podwójnej negacji);
- b.  $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$  (prawo łączności koniunkcji);
- c.  $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$  (prawo łączności alternatywy);
- d.  $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$  (prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy);
- e.  $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$  (prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji);
- f.  $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$  (prawo de Morgana);
- g.  $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$  (prawo de Morgana);
- h.  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$  (prawo transpozycji).

3. Sprawdzić, czy następujące formuły są tautologiami:

- a.  $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ ;
- b.  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$ ;
- c.  $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$ ;
- d.  $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ .

4. Czy prawdziwe jest zdanie:

a. Jeżeli liczba naturalna  $a$  dzieli się przez 3, to z faktu, że nie dzieli się przez 3 wynika, że dzieli się przez 5.

b. Jeżeli figura  $a$  jest czworokątem i  $a$  ma wszystkie kąty równe, to z faktu, że  $a$  jest czworokątem wynika, że  $a$  ma boki równe.

5. Zapisać za pomocą kwantyfikatorów, funktorów, funkcji zdaniowych  $x = y$ ,  $x < y$ , operacji arytmetycznych  $x + y$ ,  $x \cdot y$  oraz symboli liczb następujące wyrażenia:

a.  $x$  jest liczbą parzystą.

b.  $x$  jest liczbą pierwszą.

c. Nie istnieje największa liczba naturalna.

d. Każda liczba przy dzieleniu przez 2 daje resztę 0 lub 1.

e. Nie istnieje liczba, której kwadrat byłby mniejszy od 0.

f.  $x$  jest sumą kwadratów dwu liczb naturalnych.

6. Udowodnić, że następujące wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów:

a.  $\sim \exists x \Phi(x) \Leftrightarrow \forall x \sim \Phi(x)$ ;

b.  $\sim \forall x \Phi(x) \Leftrightarrow \exists x \sim \Phi(x)$ .

7. Pokazać, że następujące wyrażenia nie są tautologiami rachunku kwantyfikatorów:

a.  $[\exists x \Phi(x) \wedge \exists x \Psi(x)] \Rightarrow \exists x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]$ ;

b.  $\forall x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Rightarrow [\forall x \Phi(x) \vee \forall x \Psi(x)]$ ;

c.  $[\forall x \Phi(x) \Rightarrow \forall x \Psi(x)] \Rightarrow \forall x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)]$ .