

Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 2.

Rachunek zbiorów. Relacje i funkcje.

1. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

- a. $A \cap (A \cup B) = A$; b. $A \cup (A \cap B) = A$; c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
d. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; e. $(A \cap B)' = A' \cup B'$; f. $(A \cup B)' = A' \cap B'$;
g. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; h. $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$; i. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

2. Podając odpowiednie przykłady wykazać, że równości:

- a. $(A \setminus B) \cup B = A$; b. $(A \cup B) \setminus B = A$

nie zachodzą dla dowolnych zbiorów.

3. Wyznaczyć $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ dla następujących zbiorów:

- a. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
b. $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$;
c. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 5\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$.

4. Podać interpretację geometryczną zbiorów

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}.$$

Wyznaczyć zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$.

5. Wyznaczyć $A \times B, B \times A$ dla następujących zbiorów:

- a. $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3, 5\}$;
b. $A = \{x \in \mathbb{N} : -1 \leq x < 5\}, B = \{y \in \mathbb{R} : y > 3\}$;
c. $A = \{x \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 \geq 4\}, B = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \vee y > 2\}$.

6. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące równości:

a. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; b. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; c. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

7. Sprawdzić, czy poniższe relacje ρ są relacjami równoważności w zbiorze X :

a. $X = Z, \quad x \rho y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$;

b. $X = N, \quad x \rho y \Leftrightarrow 5 \text{ jest dzielnikiem } x - y$;

c. X - zbiór prostych na płaszczyźnie, $x \rho y \Leftrightarrow x || y$;

d. $X = R, \quad x \rho y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

W przypadku relacji równoważności wyznaczyć jej klasy abstrakcji.

8. Sprawdzić, czy poniższe relacje ρ są relacjami częściowego lub liniowego porządku w zbiorze X :

a. $X = R, \quad x \rho y \Leftrightarrow x \leq y$;

b. $X = R \times R, \quad (x_1, x_2) \rho (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$.

9. Sprawdzić czy poniższe relacje ρ są funkcjami:

a. $\rho \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}, \quad \rho = \{(a, d), (b, b), (c, a), (d, b)\}$;

b. $\rho \subseteq R_+ \times R, \quad x \rho y \Leftrightarrow y^2 = 4x$;

c. $\rho \subseteq R_+ \times R_+, \quad x \rho y \Leftrightarrow y^2 = 4x$.