

Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 4.

Liczby zespolone.

1. Wykonać działania na liczbach zespolonych:

a. $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$; b. $(4i - 3) - (1 + 10i)$; c. $(\sqrt{2} + i)(3 - \sqrt{3}i)$;

d. $\frac{2-3i}{5+4i}$; e. $(1 + i)^2$; f. $\frac{2}{1-i}$;

g. $\frac{4-i}{2+i} + i - 3$; h. $\frac{-i}{1+i}(3 + i) - 2$; i. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{3+2i}{2-3i}$.

2. Wykazać, że:

a. $Re(z_1 + z_2) = Rez_1 + Rez_2$, b. $Im(z_1 + z_2) = Imz_1 + Imz_2$,

c. $Re(iz) = -Imz$, d. $Im(iz) = Rez$.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z spełniające warunki:

a. $z^2 + 4i = 0$, b. $Rez - 3Imz = 2$, c. $Re(iz) \geq 0$.

4. Wykazać, że:

a. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, b. $z - \bar{z} = 2iImz$,

c. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, d. $Im\bar{z} = -Imz$,

e. $z\bar{z} = |z|^2$, f. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

g. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$, h. $|Rez| \leq |z|$.

5. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

a. $Argz = \pi/2$, b. $\pi/2 \leq Argz < 3\pi/2$, c. $Arg(z + i) = \pi$,

d. $\pi/4 < Arg\bar{z} \leq 3\pi/4$, e. $Arg(-\bar{z}) \geq \pi/2$, f. $|z + i| = 3$,

g. $|2iz + 6| \leq 4$, h. $2 < |z + 2 - i| \leq 3$, i. $|z + 5| = |3i - z|$, j. $|\frac{z-3}{z-3i}| > 1$.

6. Wyznaczyć $x, y \in R$ spełniające równania:

a. $x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i$; b. $(2 + yi)(x - 3i) = 7 - i$; c. $\frac{1+yi}{x-2i} = 3i - 1$.

7. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:

a. $(1 + i)^{10}$, b. $(\sqrt{3} - i)^{60}$, c. $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{44}$.

8. Obliczyć :

a. $\sqrt[3]{8i}$, b. $\sqrt[6]{-27}$, c. $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$, d. $\sqrt[8]{1}$.

9. Rozwiązać równania:

a. $z^4 = (1 - i)^4$, b. $(z - 1)^6 = (i - z)^6$.