Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 6.

Ciągi. Granica ciągu

1. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym:

a. $a_n = n^3$; b. $b_n = \frac{3n+1}{n(n+1)}$; c. $c_n = \frac{n^n}{n!}$; d. $d_n = \cos\frac{\pi}{2n}$.

2. Korzystając z definicji granicy ciągu wykazać, że:

a. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; b. $\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{(-1)^n}{n} = 2$; c. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{1}{2}$;

3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a. $a_n = \frac{4n^3-n+6}{2n^3-n^2+2n+1}$; b. $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$; c. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+5}}$;

d. $a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$; e. $a_n = \frac{n^2+3n-1}{-2n^2+n}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$; f. $a_n = \frac{4\cdot 3^{n+1}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+2}}$;

g. $a_n = \sqrt[n]{5n^3+6n^2+3n+1}$; h. $a_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$; i. $a_n = \sqrt[n]{3n+\sin n}$;

j. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; k. $a_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; l. $a_n = \left(1-\frac{1}{2n+5}\right)^{\frac{n-1}{2}}$;

ł. $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$; m. $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$.

4. *Jeśli* $\{a_n\}$ *jest ciągiem ograniczonym, zaś* $\{b_n\}$ *ciągiem zbieżnym do zera, to* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Obliczyć granice ciągów o wyrazie ogólnym:

a. $a_n = \frac{n}{n^2+1}\sin(3n+1)$, b. $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^3+1}\cos(n!)$, c. $a_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$.

5. Przy założeniu, że ciąg (a_n) określony poniższym wzorem rekurencyjnym

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right), \quad b > 0,$$

jest zbieżny, wyznaczyć jego granicę.

6. *Niech* $\{a_n\}$ *będzie zadanym ciągiem takim, że* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q =$*const. Jeżeli* $q < 1$*, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Wykazać, że ciągi $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ i $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ są zbieżne do zera.

7. Dany jest ciąg $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ... . Zbadać jego zbieżność i jeśli to możliwe wyznaczyć granicę.

8. Znaleźć zbiory punktów skupienia podanych ciągów:

a. $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$, b. $b_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$, c. $c_n = [1+(-1)^n] \cdot 2^n$, d. $d_n = 3 + 2 \cdot (-1)^n$.

9. Znaleźć granice dolne i górne podanych ciągów:

a. $a_n = 3^{4+(-1)^n}$, b. $b_n = (1+\cos n\pi)n!$.

10. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}$.

Wskazówka: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pokazać, że a_n jest polem zakreskowanego obszaru. Wywnioskować, że pole
obszaru ograniczonego osią OX i wykresem funkcji $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ jest
równe $\frac{1}{3}$.