

Analiza matematyczna (Informatyka I rok)

Zastosowania rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej - praca w grupach.

Własność Darboux.

1. Pociąg ze Szklarskiej Poręby do Warszawy przyjechał do Wrocławia 5 minut przed czasem, a do celu dotarł z 15 minutowym opóźnieniem. Pokazać, że w pewnym miejscu trasy pociąg był zgodnie z rozkładem jazdy. Nie uwzględniać postojów pociągu na trasie i stacjach.
2. Uzasadnić, że jeżeli na dolnej stacji wyciągu jest bezwietrznie, a na górnej stacji wieje wiatr z prędkością 10 m/s, to jadąc wyciągiem do góry natrafimy na miejsce, gdzie wiatr wieje z prędkością 8 m/s.
3. Uzasadnić, że jeżeli we Wrocławiu i Gdańsku jest temperatura 20°C , a w Bydgoszczy temperatura 25°C , to jadąc z Wrocławia do Gdańska przez Bydgoszcz co najmniej dwukrotnie będziemy w miejscach, w których panuje temperatura 22°C .

Pochodna i różniczka funkcji.

4. Samolot podchodzący do lądowania porusza się po łuku paraboli w ten sposób, że w miejscu lądowania trajektoria lotu jest styczna do płyty lotniska. W jakiej odległości od wieży kontroli lotu wylądował samolot, jeżeli w odległości $D = 9\text{ km}$ znajdował się on na wysokości $H = 400\text{ m}$, a w odległości $d = 6\text{ km}$ był na wysokości $h = 100\text{ m}$.
5. Taśmociąg przenosi piasek z wydajnością $w = 1\text{ m}^3/\text{min}$. Z piasku tworzy się kopiec w kształcie stożka o kącie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nachylenia tworzącej do podstawy. Obliczyć, z jaką prędkością wzrasta wysokość kopca w chwili, gdy osiągnie wysokość $H = 3\text{ m}$.
6. Balon wznosi się ze stałą prędkością $v = 3\text{ m/s}$. Na dnie kosza balonu zamontowany jest aparat do zdjęć kartograficznych. Kąt widzenia aparatu jest równy $2\alpha = 60^{\circ}$. Obliczyć, z jaką prędkością zmienia się pole fotografowanego obszaru, gdy balon jest na wysokości $H = 300\text{ m}$.
7. Do pomiaru wysokości wieży zamkowej zastosowano teodolit, którym można zmierzyć kąty z dokładnością 0.1° . Teodolit ustawiono w odległości $d = 100\text{ m}$ od podstawy wieży i wycelowano na brzeg wierzchołka wieży. Kąt jaki tworzy oś teodolitu z poziomem wynosi $\alpha = 35.7^{\circ}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć wysokość tej wieży?

Rachunek różniczkowy funkcji.

8. Jakie wymiary powinien mieć odkryty basen o kwadratowym dnie i objętości $32 m^3$, aby na okładziny jego ścian i dna została użyta najmniejsza ilość materiału.
9. Na ogrodzenie klombu w kształcie wycinka kołowego przeznaczono 20 m drutu. Jaki powinien być promień koła, aby pole klombu było największe?
10. Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od brzegu. Ropa z tej platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 E, a na lądzie 100 000 E. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?
11. Jakie powinny być wymiary prostokątnego pola o powierzchni S , którego jednym naturalnym bokiem jest brzeg rzeki, aby na jego ogrodzenie zużyć jak najmniej siatki?
12. Pod jakim kątem powinien być nachylony płaski dach przykrywający dom o ustalonej szerokości, aby krople deszczu spływały po nim najszybciej?
13. Miasta A i B położone po przeciwnych stronach rzeki trzeba połączyć drogą z mostem prostopadłym do brzegów rzeki o prostoliniowych i równoległych brzegach. W którym miejscu należy zbudować most, aby droga łącząca te miasta miała najmniejszą długość?
Znane wielkości : $l = 21$ km, $a = 2$ km, $b = 12$ km.

Rachunek całkowy funkcji.

14. Obliczyć drogę, jaką przebędzie kula tocząca się po pewnym torze w ciągu pierwszych 4 sekund od startu, jeśli prędkość z jaką się porusza wyraża się wzorem $v(t) = 6\sqrt{t} \frac{cm}{s}$.

15. Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach a, b względem boku a , przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ .

16. Obliczyć moment bezwładności względem osi OX bryły otrzymanej z obrotu dookoła tej osi górnej półelipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, przyjmując stałą gęstość przestrzenną σ .

17. Obliczyć moment statyczny względem osi OX łuku paraboli $y = \sqrt{2px}$, $p > 0$, $0 \leq x \leq 2$.

18. Obliczyć moment statyczny względem osi OX pola ograniczonego krzywą $y = a \cos \frac{2\pi}{b}x$, $a > 0$, $b > 0$, osiami OX, OY .

19. Samolot zwiadowczy S i rakietą R , która ma go zestrzelić, poruszają się po prostej. W chwili $t = 0$ odległość między nimi wynosiła $d = 9$ km. Szybkość samolotu w chwili t , gdzie $t \geq 0$, wyraża się wzorem $v_s(t) = 1 + 16t$ km/min, a szybkość rakiety $v_R(t) = 1 + 4t^3$ km/min. Po jakim czasie rakietą trafi w samolot?

20. Zbiornik na ropę ma kształt walca o osi pionowej. Średnica walca wynosi $D = 2$ m, a wysokość $H = 3$ m. Zbiornik jest napełniony ropą do poziomu $h = 1$ m. Obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, by górą wypompować ropę ze zbiornika. Masa właściwa ropy wynosi $\gamma = 700 \text{ kg/m}^3$.

Równania różniczkowe

21. Prędkość wzrostu populacji bakterii jest proporcjonalna do masy kolonii. Wiemy, że masa podwaja się co godzinę. W chwili $t = 0$ masa była równa 1 gram. Obliczyć masę po 100 minutach.

22. Prędkość spadku temperatury ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą ciała i temperaturą otoczenia. W chwili $t = 0$ ciało miało temperaturę $100^{\circ}C$, po 20 minutach jego temperatura była równa $60^{\circ}C$. Obliczyć, w jakiej chwili temperatura ciała będzie równa $30^{\circ}C$, jeśli temperatura otoczenia wynosi $25^{\circ}C$.

23. Rzucamy do góry kamień z prędkością v . Obliczyć:

a. czas wznoszenia się kamienia bez uwzględnienia oporu powietrza;

b. czas wznoszenia się z uwzględnieniem oporu powietrza proporcjonalnego do prędkości;

c. czas wznoszenia się z uwzględnieniem oporu powietrza proporcjonalnego do kwadratu prędkości;

d. czas powrotu na Ziemię z uwzględnieniem i bez uwzględnienia oporu powietrza (opór powietrza proporcjonalny do prędkości lub do kwadratu prędkości).

24. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszały tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób. Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?

25. Epidemia grypy w populacji liczącej 50000 osób rozprzestrzenia się według prawa Gompertza

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-0,03t},$$

gdzie $y(t)$ oznacza liczbę zarażonych grypą po t dniach. Załóżmy, że na początku było 100 chorych, a po 10 dniach - 500. Kiedy połowa populacji będzie zarażona?

26. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast

zmierzył temperaturę ciała denata. Wynosiła ona $32,6^{\circ}\text{C}$. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^{\circ}\text{C}$. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21°C . Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo - Jan G., twierdzi jednak, że jest niewinny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

27. (*Cig dalszy zadania poprzedniego*). Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^{\circ}\text{C}$. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

28. Rozwój populacji liczącej $M(t)$ osobników w chwili t można opisać równaniem Verhulsta

$$M'(t) = aM(t) - bM^2(t)$$

(dla populacji ludzkiej z dobrym przybliżeniem $a = 0,029$, $b = 2,941 \cdot 10^{-12}$). Udowodnić, że $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \frac{a}{b}$. Określić, dla jakiego t $M'(t)$ osiąga maksimum.

29. W dniu naczynia o kształcie walca, wypełnionego wodą, wywiercono otwór. Niech T_1 będzie czasem, w którym wypłynęło $\frac{1}{2}$ wody, a T_2 czasem, w którym wypłynęło $\frac{3}{4}$ wody. Obliczyć $\frac{T_1}{T_2}$.

Wskazówka: Prędkość wypływu wody $v = \sqrt{2gh}$, gdzie h jest wysokością słupa cieczy (uzasadnić).

30. Wykopano kawałek dębu i zbadano, że zawiera on 45 procent ilości węgla C^{14} zawartego w takim samym kawałku obecnie rosnącego dębu. Oszacować wiek znalezionej kawałka drewna, jeśli wiemy, że czas połowicznego rozpadu izotopu węgla C^{14} wynosi 5560 lat.