

Kurs wyrównawczy (Inżynieria Danych) Lista nr 3.

Funkcje - funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne.

1. Narysować wykresy poniższych funkcji i na ich podstawie omówić własności tych funkcji:

a. $f(x) = x^3$; b. $g(x) = x^{-1}$, c. $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$; d. $w(x) = x^{-2}$.

2. Niech funkcja f będzie dana wzorem $f(x) = x^{51}$.

Nie wykonując obliczeń, a korzystając tylko z własności funkcji f , porównać liczby:

a. $f(-5)$ i $f(5)$; b. $f(-3)$ i 0 , c. $f(-2)$ i $f(3)$; d. $f(3)$ i 0 .

3. Niech funkcja f będzie dana wzorem $f(x) = x^{40}$.

Nie wykonując obliczeń, a korzystając tylko z własności funkcji f , porównać liczby:

a. $f(-4)$ i $f(4)$; b. $f(-2)$ i 0 , c. $f(3)$ i 0 ; d. $f(-5)$ i $f(4)$.

4. Korzystając z własności funkcji potęgowej rozwiązać nierówności:

a. $-1 < x^5 < \frac{1}{32}$; b. $-1 < x^4 < 1$, c. $-8 < x^3 < 1$.

5. Rozwiązać układy równań w zbiorze liczb rzeczywistych:

a. $y = x^6$ i $y = 1$; b. $y = x^5$ i $y = 32$, c. $y = x^4$ i $y = 16$.

6. Narysować wykresy poniższych funkcji i na ich podstawie omówić własności tych funkcji:

a. $f(x) = 3^x$; b. $f(x) = 3^{-x}$, c. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

7. Na jednym rysunku naszkicować wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 3^x$, a następnie wyznaczyć zbiór rozwiązań nierówności:

a. $2^x > 3^x$; b. $2^x < 3^x$.

8. Korzystając z własności funkcji wykładniczej porównać liczby :

a. $\left(\frac{3}{7}\right)^{1,3}$ i $\left(\frac{3}{7}\right)^{1,5}$; b. $(0,6)^{-4}$ i $(0,6)^5$, c. 2^3 i $2^{-\frac{1}{5}}$.

9. Załóżmy, że prawdziwe są nierówności:

a. $a^{111} < a^{112}$; b. $a^{\sqrt{5}} < a^{\sqrt{7}}$, c. $a^{0,2} < a^{0,3}$, d. $a^{-\frac{1}{4}} < a^{-\frac{1}{8}}$.

Określić, czy $a \in (0, 1)$, czy też $a \in (1, \infty)$

10. Rozwiązać równania :

a. $2^x = 16$; b. $(0,1)^x = 0,01$; c. $25^x = \frac{1}{5}$; d. $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$;
e. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; f. $3^{2x} = 9^{4-x}$; g. $2^{x^2-x-3} = \frac{1}{2}$; h. $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

11. Rozwiązać nierówności :

a. $4^x > 16$; b. $2^x < 8$; c. $3^x \geq 27$; d. $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 0,04$;
e. $2^{1-x} > \frac{1}{2}$; f. $2^{3-6x} > 1$; g. $2^{2x} - 2^x - 2 \leq 0$; h. $7^x - 9 \cdot 7^{-x} + 8 > 0$.

12. Obliczyć:

a. $\log_2 8$; b. $\log_{0,5} 8$; c. $\log_{\frac{1}{3}} 9$; d. $\log_5 1$; e. $\log_7 7$; f. $\log_3 3^2$;
g. $2^{\log_2 3}$; h. $4^{\log_2 5}$; i. $\log_4 3 - 2 \log_4 2$; j. $\ln e^2 + \ln \frac{1}{e^3}$; k. $\log_6 \sqrt{10} \cdot \log 36$.

13. Porównać liczby:

a. $\log_{0,5} 8$ i $\log_{0,5} 5$; b. $\log_3 0,1$ i $\log_3 2$, c. $\log_{0,1} 8$ i 1 .

14. Narysować wykresy poniższych funkcji i na ich podstawie omówić własności tych funkcji:

a. $f(x) = \log_2 x$; b. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, c. $f(x) = \log_3 x$.

15. Wyznaczyć dziedzinę poniższych funkcji:

a. $f(x) = \log_3(9 - 3x)$; b. $f(x) = \log_{0,1}(-x)$; c. $f(x) = \log_7 x^2$;

d. $f(x) = \log_3(x^2 - 5x)$; e. $f(x) = \log(x^2 + 1)$.

16. Rozwiązać równania:

a. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$; b. $\log_{x+1} 4 = 2$; c. $\log_2(x - 1) = 3$;

d. $\log_6 x = \log_6 5 - 1$; e. $(\log_8 x)^2 - 2 \log_8 x - 1 = 0$; f. $\log_5 x = \log_5 7 + 2$;

g. $\log_2 x = \log_4 5$; h. $2 \log x = \log(5x - 4)$; i. $\log(x - 2) - \log(4 - x) = 1 - \log(13 - x)$.

17. Rozwiązać nierówności:

a. $\log_2 x < \log_2 4$; b. $\log_3 x > \log_3 4$; c. $\log_7 x < 1$;

d. $\log_7 x > -1$; e. $\log_5(3x - 1) < 1$; f. $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 5$;

g. $\log_{\frac{2}{3}} x \leq -1$; h. $\log_x(x + 2) < 2$; i. $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) > 3$.