Analiza matematyczna (Informatyka) Lista nr 1.

Liczby rzeczywiste. Funkcje jednej zmiennej rzeczywistej - podstawowe pojęcia.

1. Rozwiązać równania:

a. $|x+1| = 3$; b. $|x+1| = |x-1|$; c. $|x+1| + 2|x-1| = 5$;

d. $|1-2x| + |2x-6| = x$; e. $|4-2x| + |-x+3| = 5$; f. $|x^2 - 7x + 8| = 2$.

2. Rozwiązać nierówności:

a. $x^3 + 2x^2 - x > 0$; b. $x^4 + 2x^2 - 1 > 0$.

3. Rozwiązać nierówności:

a. $|\frac{1}{3}x - 1| < 5$; b. $|3x-5| < |x+9|$; c. $|x+100| > |2x-1|$;

d. $|x-1| + |2x-5| < 9$; e. $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| < 2$; f. $\left|\frac{5x-3}{2x+7}\right| < 2$;

g. $\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > 1$; e. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$.

4. Rozwiązać nierówności:

a. $\frac{x+3}{x-3} \geq \frac{x-1}{x+5}$; b. $\frac{1-2x}{1+x} - \frac{1+x}{1+2x} > 1$; c. $\frac{x^2-4}{x^2-5x} < 0$;

d. $\frac{13}{x-3} - \frac{3}{x+1} < -4$; e. $\frac{x^2-4}{x^2-5x+4} \geq 0$; f. $\frac{x^2-2x}{x^2-1} < 0$;

g. $1 < \frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} < 2$; h. $\left|\frac{x^2-5x+3}{x^2-1}\right| < 1$; i. $\left|\frac{x^2+2x-36}{x^2-4}\right| > 1$.

5. Zbadać ograniczoność zbiorów:

a. $A = \{2^x \,:\, x \in R\}$; b. $B = \{x \in R \,:\, \sin x < 0\}$;
c. $C = \{3 - |x| \,:\, x \in R\}$.

6. Wyznaczyć dziedzinę oraz zbiór wartości dla podanych funkcji:

a. $f(x) = 2 \arcsin \frac{1-|x|}{2}$; b. $f(x) = \sin^2 x$; c. $f(x) = \sin x^2$;
d. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-1}$; e. $f(x) = x^3 + 1$; f. $f(x) = \operatorname{tg}(x+\pi)$.

7. Dane są funkcje f i g. Napisać wzór złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$. Podać dziedziny funkcji f, g, $f \circ g$ i $g \circ f$.

a. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$; b. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$;
c. $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = 1 + x$; d. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = x^2 + 2$;
e. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \cos x$.

8. Dla funkcji $f_1(x) = 3x - 5$, $f_2(x) = 2x^2 + 1$ i $f_3(x) = \frac{4}{x}$ znaleźć $f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

9. Dane są funkcje $f_1(x) = 4x + 2$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$. Wykazać, że $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

10. Daną funkcję f zapisać jako złożenie dwóch funkcji h i g. Podać wzory funkcji h i g.

a. $f(x) = \sin x^2$, b. $f(x) = \frac{\sin x+1}{\sin^2 x}$, c. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+2}$, d. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x+1}{x-1}$,
e. $f(x) = \operatorname{tg}(\cos x^2)$, f. $f(x) = \log^2(x+1)$, g. $f(x) = \log(\sin x^2)$,
h. $f(x) = \arcsin(x+1)$.

11. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a. $f(x) = \frac{1}{x}$, $R \setminus \{0\}$, b. $g(x) = x^4$, $[0, \infty)$, c. $h(x) = 4x - x^2$, $[2, \infty)$.

12. Znaleźć funkcje odwrotne do zadanych funkcji i określić zbiór, na którym są określone:

a. $f(x) = ax + b$, $x \in R$; b. $g(x) = \sqrt{x-3}$, $x \geq 3$; c. $h(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$;
d. $w(x) = x^2 - 1$, $x > 1$.

13. Narysować wykresy funkcji:

a. $f(x) = |\sin x|$, b. $f(x) = -\sin x$, c. $f(x) = e^{-x}$,
d. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x+1)$, e. $f(x) = 2 + \operatorname{arc\,tg}(x+1)$, f. $f(x) = 2 \operatorname{arc\,tg}(x+1)$.