Analiza matematyczna (Informatyka) Lista nr 2.

Ciągi. Granica ciągu. Szeregi liczbowe. Kryteria zbieżności szeregów.

1. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym:

a. $a_n = n^3$; b. $b_n = \frac{3n+1}{n(n+1)}$; c. $c_n = \frac{n^n}{n!}$; d. $d_n = \cos\frac{\pi}{2n}$.

2. Korzystając z definicji granicy ciągu wykazać, że:

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; b. $\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{(-1)^n}{n} = 2$; c. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{1}{2}$;

3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a. $a_n = \frac{4n^3-n+6}{2n^3-n^2+2n+1}$; b. $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$; c. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+5}}$;

d. $a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$; e. $a_n = \frac{n^2+3n-1}{-2n^2+n}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$; f. $a_n = \frac{4\cdot 3^{n+1}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+2}}$;

g. $a_n = \sqrt[n]{5n^3+6n^2+3n+1}$; h. $a_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$; i. $a_n = \sqrt[n]{3n+\sin n}$;

j. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; k. $a_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$; l. $a_n = \left(1 - \frac{1}{2n+5}\right)^{\frac{n-1}{2}}$;

ł. $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$; m. $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$.

4. *Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, zaś $\{b_n\}$ ciągiem zbieżnym do zera, to* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Obliczyć granice ciągów o wyrazie ogólnym:

a. $a_n = \frac{n}{n^2+1}\sin(3n+1)$, b. $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^3+1}\cos(n!)$, c. $a_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$.

5. Przy założeniu, że ciąg (a_n) określony poniższym wzorem rekurencyjnym

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right), \quad b > 0,$$

jest zbieżny, wyznaczyć jego granicę.

6. *Niech $\{a_n\}$ będzie zadanym ciągiem takim, że* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q =$*const. Jeżeli $q < 1$, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Wykazać, że ciągi $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ i $b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ są zbieżne do zera.

7. Wykorzystując warunek konieczny zbieżności szeregu, wykazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^2-n^3}{(n-1)^3}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

8. Stosując kryterium d'Alamberta zbadać zbieżność następujących szeregów:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$.

9. Korzystając z kryterium Cauchy'ego rozstrzygnąć, które z podanych niżej szeregów są zbieżne:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$.

10. Zbadać zbieżność szeregów:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^4+2n^2+1}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+3n^2+1}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{3^n}$; f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4^n}{4^n}$; g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^3}$.

11. Zbadać zbieżność bewzględną szeregów:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n!}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

12. Wykazać, że:

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$; b. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n} = 0$; c. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$;

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n} = 0$.