Analiza matematyczna (Informatyka) Lista nr 3.

Granica funkcji.

1. Obliczyć granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach i rozstrzygnąć, czy funkcje te mają w tych punktach granice:

a. $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x$ w punkcie $x_0 = 1$;

b. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x_0 = 0$;

c. $f(x) = \frac{x}{x-2}$ w punkcie $x_0 = 2$;

d. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1-x}$ w punkcie $x_0 = 1$;

e. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ w punkcie $x_0 = 0$;

f. $f(x) = \operatorname{tg} x$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

g. $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x}$ w punkcie $x_0 = 3$.

2. Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x-3}$; b. $\lim_{x\to\pi} 2^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. Obliczyć granice:

a. $\lim_{x\to -1} \frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$; b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$; c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$;

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$; e. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$; f. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

g. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$; h. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$; i. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\log(1+2^x)}{3^x}$.

j. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$. k. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\pi-2x}$; l. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

4. Obliczyć granice:

a. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x(\sqrt{x^2+1}-x)}$; c. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

d. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}$; e. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, uzasadnić równości:

a. $\lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = 0$; b. $\lim_{x\to\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} = 0$; c. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x^2} = 0$.

6. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach, uzasadnić równości:

a. $\lim_{x\to\infty}(2\sin x - x) = -\infty$; b. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} = \infty$.