

Analiza matematyczna (Informatyka) Lista nr 6.

Pochodna funkcji. Różniczkowalność funkcji. Różniczka funkcji.

1. Korzystając z definicji zbadać istnienie pochodnej podanej niżej funkcji w punkcie $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

2. Korzystając z definicji zbadać istnienie pochodnej funkcji $g(x) = \sqrt{|x-1|}$ w punkcie $x_0 = 1$:

3. Dobrać parametry a, b, c, d, p tak, aby funkcja $f : R \rightarrow R$, określona w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{dla } x \leq -1 \\ -bx^2 + 2 & \text{dla } -1 < x \leq 0 \\ c \cos x + d & \text{dla } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ dp^{\cos x} + p - 1 & \text{dla } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

była różniczkowalna na R .

4. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji $f(x) = |x| + |x+1|$ oraz narysować jej wykres.

5. Podać dziedzinę i obliczyć pochodne następujących funkcji (a) wychodząc bezpośrednio z definicji pochodnej, (b) posługując się znanymi regułami różniczkowania:

a. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, b. $g(x) = \sqrt[3]{x}$, c. $h(x) = \sqrt{x+1}$, d. $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.

6. Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3}$, b. $y = \arcsin \sqrt[4]{1-5x}$, c. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^x})$, d. $y = \frac{\arcsin x}{e^x}$,

e. $y = (1 + \sqrt[4]{x}) \operatorname{tg}(\sqrt{x})$, f. $y = \frac{2 \sin^2 x}{3 \cos^2 x}$, g. $y = \ln |\cos x|$, h. $y = \sin(\cos(x^2))$.

Podać warunki określające dziedzinę każdej z funkcji.

7. Niech $y = f(x)$ będzie funkcją o wartościach dodatnich w przedziale (a, b) (ograniczonym lub nie). Wyrażenie

$$(*) \quad (\ln y)' = \frac{y'}{y},$$

(gdzie ' oznacza różniczkowanie $\frac{d}{dx}$) nazywamy *pochodną logarytmiczną* funkcji f . Wykorzystując wzór (*) zróżniczkować podane funkcje:

a. $y = (1 + \sin x)^{\sqrt{x}}$, b. $y = (1 + x^2)^{\ln(1+x^2)}$, c. $y = (\sin x)^{\cos x}$, d. $y = x^{(e^x)}$.

8. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0 , jeżeli

a. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, b. $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 1$, c. $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$.

9. Obliczyć pochodne f' , f'' , f''' dla podanych funkcji:

a. $f(x) = x \ln x$, b. $f(x) = (x^2 + x + 1) \cos x$.

10. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a. $\sin 29^\circ$, b. $\ln 0.9993$, c. $\arccos 0.499$, d. $\frac{1}{3.98}$, e. $e^{-0.07}$.