I. Podstawowe pojęcia i oznaczenia logiczne i mnogościowe. Elementy teorii liczb rzeczywistych.

1. Elementy logiki matematycznej.

1.1. Rachunek zdań.

Definicja 1.1.
Zdaniem logicznym nazywamy zdanie gramatyczne oznajmujące, które w ramach danej nauki jest albo prawdziwe albo fałszywe. Prawdziwość i fałszywość są to dwie wartości logiczne zdania. Zdaniom prawdziwym przypisujemy wartość logiczną **1**, a fałszywym **0**.

Przykład 1.1.

Zdanie „Czy lipa jest drewnem miękkim??” nie jest zdaniem logicznym, bo jest pytaniem.

Zdanie „Pewne drewno jest trwardsze od jesionu” jest zdaniem logicznym prawdziwym.

Zdanie „Orzech jest drewnem miękkim” jest zdaniem logicznym fałszywym.

Zdanie ”Liczba naturalna n jest mniejsza od 5” nie jest zdaniem logicznym, gdyż jego wartość logiczna zależy od n.

Zdania logiczne oznaczamy przez p, q, r itd. Mając dane zdania p, q można tworzyć zdania złożone za pomocą spójników logicznych:

$\sim p$ - negacja zdania p, czytamy ’nieprawda, że p’ lub ’nie p’;

$p \wedge q$ - koniunkcja zdań p i q, czytamy ’p i q’;

$p \vee q$ - alternatywa zdań p i q, czytamy ’p lub q’;

$p \Rightarrow q$ - implikacja o poprzedniku p i następniku q, czytamy ’jeśli p to q’ lub ’z p wynika q’ lub ’p implikuje q’;

$p \Leftrightarrow q$ - równoważność zdań p i q, czytamy ’p wtedy i tylko wtedy, gdy q’.

Wartości logiczne poszczególnych zdań w zależności od wartości zdań je tworzących:
Tabele.

Kolejność wykonywania działań logicznych:

$$\sim, \ \wedge, \ \vee, \ \Rightarrow, \ \Leftrightarrow .$$

Nawiasy odgrywają taką rolę jak w arytmetyce.

Definicja 1.2.
Formułą rachunku zdań nazywamy wyrażenie składające się ze zmiennych zdaniowych tj. zdań p, q, r itd. połączonych spójnikami logicznymi
$\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Przykład 1.2.
Wyznaczymy wartość logiczną formuły

$$P \ : \ \ p \vee (q \Rightarrow p \wedge q)$$

przy podstawieniu $p = \mathbf{1}$, $q = \mathbf{0}$.
Tabela.
Wartość formuły P wynosi $\mathbf{1}$.

Definicja 1.3.
Tautologią lub *prawem logiki* nazywamy formułę rachunku zdań, która przyjmuje wartość logiczną $\mathbf{1}$ przy dowolnym podstawieniu wartości logicznych w miejsce zmiennych zdaniowych.

Przykład 1.3.
Sprawdzimy czy formuła

$$P \ : \ \ p \Rightarrow q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p \wedge q)$$

jest tautologią.
Tabela.
Niezależnie jakie zdania prawdziwe czy fałszywe podstawiamy w miejsce p i q otrzymujemy zawsze zdanie prawdziwe, tj. o wartości logicznej $\mathbf{1}$. Zatem P jest tautologią.

Przykład 1.4.
Sprawdzimy czy formuła

$$P \ : \quad (p \wedge q \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow q)$$

jest tautologią.
Tabela.
Formuła P nie jest tautologią.

1.2. Kwantyfikatory.

$\forall$ lub $\bigwedge$ kwantyfikator ogólny

$\exists$ lub $\bigvee$ kwantyfikator szczegółowy

Zapis
$\forall x \ \ p(x)$ lub $\bigwedge_x \ \ p(x)$
czytamy 'dla każdego x zachodzi warunek $p(x)$'.
Zapis
$\exists x \ \ p(x)$ lub $\bigvee_x \ \ p(x)$
czytamy 'istnieje x, dla którego zachodzi warunek $p(x)$'.

Przykład 1.5.
$\forall x \in R \ \ x^2 \geq 0, \qquad \exists x \in R \ \ x^2 - 1 = 0.$

2. Elementy algebry zbiorów.

2.1. Podstawowe pojęcia mnogościowe.

- zbiór $A, B, C, ...$
- element zbioru $a, b, c, ...$
- relacja należenia $\in$

Zapis $a \in A$ czytamy 'element a należy do zbioru A'.

Zapis $a \notin A$ czytamy 'element a nie należy do zbioru A'.

$$a \notin A \;\Leftrightarrow \sim a \in A$$

- zbiór pusty $\oslash$, $\quad A = \oslash \;\Leftrightarrow\; \forall x \;\; \sim x \in A$
- zbiór skończony o elementach $a_1, a_2, a_3, ..., a_k \;:\; \{a_1, a_2, ..., a_k\}$
- zbiór wszystkich elementów zbioru X mających daną własność w : $\quad \{x \in X \;:\; w(x)\}$
- relacje zawierania się zbioru $\subset$, $\subseteq$

Zapis $A \subset B$ czytamy 'zbiór A zawiera się w zbiorze B' lub 'zbiór A jest podzbiorem zbioru B'.

$A \subset B \;\Leftrightarrow\; [\forall x \; (x \in A \Rightarrow \; x \in B)]$

Zapis $A \subseteq B$ dopuszcza równość zbiorów A i B.

Mówimy, że zbiory A i B są równe, co ozn. $A = B$, jeśli składają się z tych samych elementów, tj.

$$A = B \;\Leftrightarrow\; [\forall x \; (x \in A \Leftrightarrow \; x \in B)],$$

czyli

$$A = B \;\Leftrightarrow\; (A \subset B \;\wedge\; B \subset A).$$

2.2. Działania na zbiorach.

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ - suma zbiorów A i B
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ - iloczyn (przekrój) zbiorów A i B
- $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge \sim x \in B\}$ - różnica zbiorów A i B
- $A' = \{x : \sim x \in A\}$ - dopełnienie zbioru A

Zbiory A i B nazywamy rozłącznymi, jeśli $A \cap B = \oslash$.

2.3. Iloczyn kartezjański.

Definicja 2.1.
Parą, której pierwszym elementem jest a, zaś drugim b nazywamy uporządkowany zbiór dwuelementowy i oznaczamy przez (a, b).

Definicja 2.2.
Iloczynem kartezjńskim zbiorów A i B nazywamy zbiór oznaczany przez $A \times B$ wszystkich par uporządkowanych, których pierwszy element należy do zbioru A, a drugi do zbioru B, tzn.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Przykład 2.1.

Dla zbiorów $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ mamy

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$ oraz $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

2.4. Oznaczenia zbiorów liczbowych.

- $N = \{1, 2, 3, ...\}$ - zbiór liczb naturalnych
- $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ - zbiór liczb całkowitych
- $Q = \{\frac{p}{q} : p \in Z \wedge q \in N\}$ - zbiór liczb wymiernych
- R - zbiór liczb rzeczywistych

Symbolika przedziałów liczbowych:

- $[a, b]$ - przedział domknięty o końcach a i b
- (a, b) - przedział otwarty o końcach a i b
- $(a, b]$ - przedział lewostronnie otwarty i prawostronnie domknięty
- $[a, b)$ - przedział lewostronnie domknięty i prawostronnie otwarty
- $(a, \infty) = \{x \in R : x > a\}$
- $[a, \infty) = \{x \in R : x \geq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in R : x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in R : x \leq a\}$
- $(-\infty, \infty) = R$
- $(-\infty, 0] = R_-$
- $[0, \infty) = R_+$

3. Kresy zbiorów.

Definicja 3.1.
Mówimy, że zbiór $A \subset R$ jest *ograniczony z dołu*, jeżeli

$$\exists m \in R \;\; \forall x \in A \quad x \geq m.$$

Mówimy, że zbiór $A \subset R$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli

$$\exists M \in R \;\; \forall x \in A \quad x \leq M.$$

Liczbę m nazywamy ograniczeniem dolnym, zaś liczbę M ograniczeniem górnym zbioru A.

Definicja 3.2.
Zbiór $A \subset R$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli jest ograniczony z dołu i z góry, tzn.

$$\exists m, M \in R \;\; \forall x \in A \quad m \leq x \leq M.$$

Przyjmując $0 < M := -m$ można powyższy warunek zapisać w postaci

$$\exists M > 0 \;\; \forall x \in A \quad -M \leq x \leq M.$$

Definicja 3.3.
Liczbę a nazywamy *elementem najmniejszym* zbioru $A \subset R$ i oznaczamy $a = minA$, jeżeli

$$a \in A \quad \wedge \quad \forall x \in A \quad x \geq a.$$

Liczbę b nazywamy *elementem największym* zbioru $A \subset R$ i oznaczamy $b = maxA$, jeżeli

$$b \in A \quad \wedge \quad \forall x \in A \quad x \leq b.$$

np. dla $A = [0, 1]$ mamy $minA = 0$ i $maxA = 1$.

Definicja 3.4.
Niech zbiór $A \subset R$ będzie ograniczony z dołu. Liczbę $a \in R$ nazywamy *kresem dolnym (infimum)* zbioru A, co oznaczamy $a = infA$, jeżeli zachodzą warunki:

(i) $\forall x \in A \quad x \geq a$;

(ii) $\forall \epsilon > 0 \; \exists x_0 \in A \quad x_0 - \epsilon < a$.

Kres dolny zbioru A to największe ograniczenie dolne tego zbioru.

Definicja 3.5.
Niech zbiór $A \subset R$ będzie ograniczony z góry. Liczbę $b \in R$ nazywamy *kresem górnym (supremum)* zbioru A, co oznaczamy $b = supA$, jeżeli zachodzą warunki:

(i) $\forall x \in A \quad x \leq b$;

(ii) $\forall \epsilon > 0 \; \exists x_0 \in A \quad x_0 + \epsilon > b$.

Kres górny zbioru A to najmniejsze ograniczenie górne tego zbioru.

Uwaga.
Element najmniejszy (największy) zbioru jest jednocześnie jego kresem dolnym (górnym).
Dla zbioru A, który nie jest ograniczony z dołu (z góry) będziemy przyjmować, że $infA = -\infty \quad (supA = +\infty)$.

Przykłady 3.1
Wskazać kresy dla zbiorów $A = [2, 8], \quad B = (-1, \infty), \; C = (1, 2)$,

$D = (\infty, 100], \; E = \{x^2 : x \in R\}, \; F = \{\sin x : x \in R\}$.

4. Wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej.

Definicja 4.1.
Wartość bezwzględną (moduł) liczby rzeczywistej x oznaczamy przez $|x|$ i definiujemy następująco

$$|x| = x \ \ dla \ \ x \geq 0 \ \ oraz \ \ |x| = -x \ \ dla \ \ x < 0.$$

Podstawowe własności wartości bezwzględnej.

Niech $x, y \in R$.

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;
3. $|x| = |-x|$;
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
6. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$;
7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$;
8. $\sqrt{x^2} = |x|$;
9. $|x^n| = |x|^n$;
10. $|x| \leq a \ \Leftrightarrow \ -a \leq x \leq a \ \Leftrightarrow \ x \in [-a, a], \quad a \geq 0$;
11. $|x| < a \ \Leftrightarrow \ -a < x < a \ \Leftrightarrow \ x \in (-a, a), \quad a > 0$;
12. $|x| \geq a \ \Leftrightarrow \ (x \geq a \quad \text{lub} \quad x \leq -a) \ \ \Leftrightarrow \ x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), \quad a \geq 0$;
13. $|x| > a \ \Leftrightarrow \ (x < a \quad \text{lub} \quad x > -a) \ \ \Leftrightarrow \ x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty), \quad a \geq 0$.