IV. Szeregi liczbowe.

1. Podstawowe definicje i fakty.

Definicja 1.1.
Szeregiem liczbowym nazywamy wyrażenie

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

zapisane w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

gdzie $a_n \in R$ dla $n = 1, 2, 3, ...$

Definicja 1.2.
Ciąg $\{S_n\}$ zdefiniowany następująco

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywamy *ciągiem sum częściowych* szeregu (1).

Definicja 1.3.
Jeżeli ciąg $\{S_n\}$ jest zbieżny do granicy właściwej s, to szereg (1) nazywamy zbieżnym, zaś liczbę s nazywamy sumą tego szeregu i piszemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Jeśli $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, to mówimy, że szereg (1) jest rozbieżny odpowiednio do $\pm\infty$. W pozostałych sytuacjach szereg (1) jest rozbieżny.

Twierdzenie 1.4.
Jeżeli w szeregu zbieżnym zmienimy, opuścimy lub dołączymy skończoną ilość wyrazów, to otrzymany szereg będzie również zbieżny.

Fakt 1.5. (o szeregu geometrycznym)
Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ...$$

jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny do ∞ dla $q \geq 1$, a rozbieżny dla $q \leq -1$.

Dla zbieżnego szeregu geometrycznego mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Fakt 1.6. (o szeregu harmonicznym)
Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

zwany szeregiem harmonicznym rzędu α jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $0 < \alpha \leq 1$.

Twierdzenie 1.7. (warunek konieczny zbieżności)
Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uwaga.
Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, np. $\frac{1}{n} \to 0$, gdy $n \to \infty$, zaś szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, zwany krótko szeregiem harmonicznym, jest rozbieżny do $+\infty$.

Twierdzenie 1.7 można sformułować w postaci:

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 4.1.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+200}$. Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+200} = 1 \neq 0.$$

Zatem nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu i stąd szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+200}$ jest rozbieżny.

2. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych.

Twierdzenie 2.1. (kryterium d'Alamberta)
Załóżmy, że $a_n > 0$ oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

(i) Jeżeli $q < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(i) Jeżeli $q > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 4.2.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Twierdzenie 2.2. (kryterium Cauchy'ego)
Załóżmy, że $a_n \geq 0$ oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

(i) Jeżeli $q < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(ii) Jeżeli $q > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 4.3.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n(4 + \frac{1}{n})$.

Twierdzenie 2.3. (kryterium porównawcze)

Niech $a_n, b_n \geq 0$. Załóżmy, że nierówność

$$a_n \leq b_n$$

zachodzi dla wszystkich $n \geq n_0$ począwszy od pewnego numeru n_0.

Wówczas

(i) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(ii) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Przykład 4.4.

Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$.

3. Szeregi o wyrazach naprzemiennych. Zbieżność bezwzględna szeregów.

Definicja 3.1.
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, gdzie $a_n \geq 0$, nazywamy szeregiem naprzemiennym.

Twierdzenie 3.2. (kryterium Leibniza)
Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Jeżeli spełnione są warunki:

(i) $a_n \geq 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

(iii) ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący,

to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Definicja 3.3.
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy szeregiem bezwględnie zbieżnym, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Twierdzenie 3.4.
Szereg bezwględnie zbieżny jest zbieżny, tzn. jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicja 3.5.
Szereg, który jest zbieżny, ale nie jest bezwględnie zbieżny nazywamy szeregiem warunkowo zbieżnym.

Przykład 4.5.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

Przykład 4.6.
Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.