Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

(1) $\int 0\,dx = C, \quad x \in R;$

(2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in N \cup \{0\}, \quad x \in R;$

(3) $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \in \{-2,-3,-4,...\}, \quad x \in R \setminus \{0\};$

(4) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in R \setminus Z,$ zakres zmienności x zależy od wartości α;

(5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \in R \setminus \{0\};$

(6) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \in R;$

(7) $\int e^x\,dx = e^x + C, \quad x \in R;$

(8) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad x \in R;$

(9) $\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad x \in R;$

(10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi), \quad k \in Z;$

(11) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in Z;$

(12) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C, \quad x \in R;$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \quad x \in (-1,1).$

Liniowość całki oznaczonej

Zakładamy, że funkcje f i g mają funkcje pierwotne, $c \in R$. Wówczas

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx;$$
$$\int cf(x))\, dx = c \int f(x)\, dx.$$

Wzór na całkowanie przez części

Zakładamy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wówczas

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Wzór na całkowanie przez podstawienie

Zakładamy, że funkcja $f : I \to R$ jest ciągła na przedziale I, funkcja $\varphi : J \to I$ ma ciągłą pochodną na przedziale J. Wówczas

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

(A) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C;$

(B) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$

1. Całkowanie funkcji wymiernych.

Def. (funkcji wymiernej właściwej)

Funkcję wymierną $W(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ *nazywamy właściwą, jeżeli* $n < m$.

Fakt.

Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można zapisać w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Def. (ułamków prostych)

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{A}{(x+a)^n}$, *gdzie* $n \in N$, $A, a \in R$ *nazywamy ułamkiem prostym I-go rodzaju.*

Funkcję wymierną właściwą postaci $\frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^n}$, *gdzie* $n \in N$, $p, q, B, C \in R$, *przy czym* $\Delta = p^2 - 4q < 0$ *nazywamy ułamkiem prostym II-go rodzaju.*

Fakt. (rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste)

Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych. Funkcja wymierna właściwa postaci

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1 + k_2 + ... + k_r$ ułamków prostych I-go rodzaju oraz $l_1 + l_2 + ... + l_s$ ułamków prostych II-go rodzaju, przy czym

- czynnikowi $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych I-go rodzaju postaci

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + ... + \frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}}, \quad 1 \le i \le r;$$

- czynnikowi $(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych II-go rodzaju postaci

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + ... + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}, \quad 1 \le j \le s,$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik_i}, B_{j1}, B_{j2}, ..., B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, ..., C_{jl_j} \in R$.

Przykład

$$\frac{x+1}{x^3(x-5)^2(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-5} + \frac{E}{(x-5)^2} + \frac{F}{x-1} + \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{cx+d}{(x^2+4)^2}$$

W celu znalezienia współczynników $A, B, CD, E, F, a, b, c, d$ należy pomnożyć powyższą równość przez mianownik $x^3(x-5)^2(x-1)(x^2+4)^2$. Otrzymamy równość dwóch wielomianów. Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x po obu stronach tej równości, dostaniemy układ warunków, z którego wyznaczymy szukane współczynniki.

Algorytm całkowania funkcji wymiernych.

(Krok 1.) Funkcję wymierną niewłaściwą zapisujemy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

(Krok 2.) Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe $x - x_i$ oraz kwadratowe $x^2 + px + q$, gdzie $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

(Krok 3.) Rozkładamy funkcję wymierną właściwą na ułamki proste.

(Krok 4.) Obliczamy całki z ułamków prostych korzystając m.in. z poniższych wzorów:

(1.1) $\int \frac{A}{x+a}\,dx = A\ln|x+a| + C,$

(1.2) $\int \frac{A}{(x+a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \quad n \geq 2,$

(1.3) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx, \quad a > 0,\, n \geq 2.$

2. Wybrane całki z funkcji trygonometrycznych.

(2.1) $\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C, \quad a \neq 0,$

(2.2) $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C, \quad a \neq 0,$

(2.3) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C,$

(2.4) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C,$

(2.5) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx, \quad n \in N,$

(2.6) $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx, \quad n \in N,$

(2.7) $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx, \quad n > 2,$

(2.8) $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx = -\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\, dx, \quad n > 2.$

Całki postaci

$$\int \sin ax \cos bx\, dx, \quad \int \sin ax \sin bx\, dx, \quad \int \cos ax \cos bx\, dx,$$

obliczamy stosując tożsamości trygonometryczne

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$
$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$
$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

Całkę postaci

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\, dx,$$

gdzie R dowolna funkcja, można obliczyć stosując podstawienie

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Wtedy

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Całkę postaci

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\, dx,$$

gdzie R dowolna funkcja, można obliczyć stosując podstawienie

$$u = \operatorname{tg} x.$$

Wtedy

$$dx = \frac{du}{1+u^2}, \quad \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{u}{1+u^2}.$$

3. Wybrane całki z funkcji z niewymiernościami.

(3.1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \in R;$

(3.2) $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{k} + C, \quad k > 0;$

(3.3) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C,$

(3.4) $\int \sqrt{k^2-x^2}\,dx = \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k} + \frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2} + C, \quad k > 0;$

(3.5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k} - \frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2} + C, \quad k > 0;$

(3.6) $\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \in R;$

(3.7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} - \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \in R.$

Przykłady stosowanych podstawień przy obliczaniu całek z funkcji z niewymiernościami:

(3.8) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$ podstawienie : $t = \frac{1}{x-\alpha};$

(3.9) $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{px^2+q}}\,dx,$ podstawienie : $\sqrt{px^2+q} = tx;$

(3.10) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$ podstawienia Eulera:

(1) $a > 0 \;\Rightarrow$ podstawiamy $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ lub $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x;$

(2) $c > 0 \;\Rightarrow$ podstawiamy $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}$ lub $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c};$

(3) $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ podstawiamy $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} := t(x-x_1)$
lub $\sqrt{ax^2+bx+c} := t(x-x_2),$
gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c.

(3.11) $\int x^m(b+ax^n)^p\,dx,$ gdzie $m, n, p \in Q,$

(1) $p \in Z \;\Rightarrow$ podstawiamy $x = t^r$, gdzie r wspólny mianownik ułamków m i n;

(2) $\frac{m+1}{n} \in Z \;\Rightarrow$ podstawiamy $b + ax^n = t^s$, gdzie s mianownik ułamka p;

(3) $\frac{m+1}{n} + 1 \in Z \;\Rightarrow$ podstawiamy $b + ax^{-n} = t^s$, gdzie s mianownik ułamka p.