3.4. Zastosowania całek oznaczonych.

3.4.1. Przykłady zastosowań całek oznaczonych w geometrii.

A. Obliczanie pól figur płaskich.

1. Zakładamy, że f jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a, b]$.

Pole obszaru
$$D = \{(x, y) \in R^2 \,:\, a \leq x \leq b \;\wedge\; 0 \leq y \leq f(x)\}$$
wyraża się wzorem
$$|D| = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Zakładamy, że funkcje f i g są ciągłe na przedziale $[a, b]$ i spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a, b]$.

Pole obszaru
$$D = \{(x, y) \in R^2 \,:\, a \leq x \leq b \;\wedge\; f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
wyraża się wzorem
$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

3. Zakładamy, że funkcje $x = f(y)$ i $x = g(y)$ są ciągłe na przedziale $[c, d]$ i spełniają nierówność $f(y) \leq g(y)$ dla $y \in [c, d]$.

Pole obszaru
$$D = \{(x, y) \in R^2 \,:\, f(y) \leq x \leq g(y) \;\wedge\; c \leq y \leq d\}$$
wyraża się wzorem
$$|D| = \int_a^b [g(y) - f(y)]\,dy.$$

4. Niech (φ, r) oznaczają współrzędne biegunowe punktu (x, y), tzn.
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Pole obszaru S ograniczonego krzywą zadaną równaniem we współrzędnych biegunowych $r = f(\varphi)$ oraz prostymi $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ wyraża się wzorem
$$|S| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

B. Obliczanie długości łuku krzywej.

1. Zakładamy, że funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$.

Długość łuku krzywej

$$\Gamma = \{(x,y) \in R^2 \,:\, a \le x \le b \,\wedge\, y = f(x)\}$$

wyraża się wzorem

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

2. Zakładamy, że funkcje $x = x(t)$ i $y = y(t)$ mają ciągłe pochodne na przedziale $[\alpha, \beta]$.

Długość łuku krzywej zadanej równaniami parametrycznymi

$$\Gamma = \{(x,y) \in R^2 \,:\, x = x(t),\, y = y(t),\; t \in [\alpha, \beta]\}.$$

wyraża się wzorem

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

C. Obliczanie objętości bryły obrotowej.

1. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $[a,b]$.

Objętość bryły obrotowej V powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0x$ dla $x \in [a,b]$ wyraża się wzorem

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

2. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $[a,b]$ oraz $a \ge 0$.

Objętość bryły obrotowej V powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0y$ dla $x \in [a,b]$ wyraża się wzorem

$$|V| = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

D. Obliczanie pola powierzchni bryły obrotowej.

1. Zakładamy, że funkcja f jest nieujemna i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$.

Pole powierzchni Σ bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0x$ dla $x \in [a,b]$ wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

2. Zakładamy, że funkcja f jest nieujemna i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$ oraz $a \geq 0$.

Pole powierzchni Σ bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0y$ dla $x \in [a,b]$ wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

3.4.2. Przykłady zastosowań całek oznaczonych w fizyce.

A. Obliczanie długości drogi w ruchu zmiennym.

Długość drogi przebytej przez punkt materialny poruszający się ze zmienną prędkością $v(t)$ w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

B. Obliczanie pracy wykonanej przez zmienną siłę.

Praca wykonana przez zmienną siłę $F(x)$ równoległą do osi Ox na odcinku od punktu $x=a$ do punktu $x=b$ wyraża się wzorem:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

3.4.3. Przykłady zastosowań całek oznaczonych do obliczania wielkości mechanicznych.

A. Wyznaczanie momentów statycznych, momentów bezwładności i środka ciężkości figury płaskiej.

Zakładamy, że f jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a, b]$. Oznaczamy

$$A = (a, f(a)), \; A' = (a, 0), \; B = (b, f(b)), \; B' = (b, 0).$$

Rozważamy figurę płaską $AA'B'B$ ograniczoną krzywą AB będącą wykresem funkcji $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$, odcinkiem $A'B'$ osi Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, tj.

$$AA'B'B = \{(x, y) \in R^2 \; : \; a \leq x \leq b \; \wedge \; 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Załóżmy, że masa jest rozłożona na tej figurze równomiernie, tak że gęstość powierzchniowa ρ (tj. masa przypadająca na jednostkę pola) jest stała.

(1) Moment statyczny M_x figury $AA'B'B$ względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

(2) Moment statyczny M_y figury $AA'B'B$ względem osi $0y$ wyraża się wzorem:

$$M_y = \rho \int_a^b x f(x) \, dx.$$

(3) Współrzędne środka ciężkości (ξ, η) figury $AA'B'B$ wyrażają się wzorami:

$$\xi = \frac{\int_a^b x f(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx}.$$

(4) Moment bezwładności I_x figury $AA'B'B$ względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$I_x = \frac{1}{3}\rho \int_a^b [f(x)]^3 \, dx.$$

B. Wyznaczanie momentów bezwładności i środka ciężkości bryły obrotowej.

Niech V będzie bryłą obrotową powstałą przez obrót figury płaskiej $AA'B'B$ wokół osi $0x$. Zakładamy, że gęstość przestrzenna σ (tj. masa przypadająca na jednostkę objętości) jest stała.

(1) Moment bezwładności I_x bryły V względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\sigma \int_a^b [f(x)]^4\, dx.$$

(2) Środek ciężkości (ξ, η) bryły V leży na osi $0x$ i ma współrzędne :

$$\xi = \frac{\int_a^b x[f(x)]^2\, dx}{\int_a^b [f(x)]^2\, dx}, \qquad \eta = 0.$$

C. Wyznaczanie momentów statycznych, momentów bezwładności i środka ciężkości łuku krzywej.

Zakładamy, że funkcja f ma ciągłą pochodną i jest nieujemna na przedziale $[a, b]$.
Rozważamy łuk AB krzywej $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$, tj.

$$AB = \{(x, y) \in R^2 \,:\, a \le x \le b \;\wedge\; y = f(x)\}.$$

Zakładamy, że gęstość liniowa λ (tj. masa przypadająca na jednostkę długości) jest stała.

(1) Moment bezwładności I_x łuku krzywej AB względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$I_x = \lambda \int_a^b [f(x)]^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

(2) Środek ciężkości (ξ, η) łuku krzywej AB ma współrzędne :

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}, \qquad \eta = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}.$$

(3) Moment statyczny M_x łuku krzywej AB względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$M_x = \lambda \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$