**Emil Panek**

**Wykład 9. Rynek konkurencyjny z nieklasycznym równaniem dynamiki cen**

**5.1. Wersja podstawowa rynku**

 Dotąd zakładaliśmy następujący mechanizm dostosowania cen do popytu i podaży:

* jeżeli popyt na towar w pewnym okresie *t* przekracza jego podaż, a więc gdy na rynku mamy do czynienia z niedoborem towaru, w okresie następnym jego cena rośnie,
* jeżeli popyt na towar w okresie *t*  jest niższy od jego podaży, tj. gdy na rynku obserwujemy nadmiar towaru, wówczas jego cena w okresie następnym maleje,
* jeżeli popyt na pewien towar w okresie *t* jest równy jego podaży, cena towaru nie zmienia się.

 W rzeczywistości niejednokrotnie mamy do czynienia z odstępstwami od tej reguły, których przyczyny, często subiektywne, o różnym podłożu, są często trudne do ustalenia. Jeden z takich prostych modeli rynku z nieklasycznym równaniem dynamiki cen jest przedmiotem artykułu. Przy dowodzie twierdzenia o globalnej stabilności rynku wzorujemy się na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym odwzorowania zwężającego zbioru w siebie.

Podobnie jak w punkcie 4.4 zakładamy, że czas, w którym kupcy przeprowadzają swoje transakcje, zmienia się skokowo: zmienna czasu *t* przyjmuje kolejne wartości 0,1,2,... . Zbiór  nazywamy tradycyjnie horyzontem (nieskończonym) rynku.

Przez  oznaczamy koszyk towarów, z którym przybywa na rynek *k*- ty kupiec z zamiarem jego sprzedaży oraz przez  koszyk towarów, które jest on gotów nabyć w zamian. Podobnie jak dotychczas, obie transakcje zachodzą równocześnie. a przestrzenią towarów interesujących *k-*tego kupca jest cały nieujemny orthant , *k* =1, 2,...,*n*. Przez  oznaczamy wektor cen obowiązujących na rynku w okresie *t* (ceny na całym rynku są jednolite; innymi słowy, ten sam towar w dwóch różnych miejscach nie może mieć różnej ceny). Ceny w okresie początkowym *t=*0 są ustalone:

 . (5.1)

Przy wyborze koszyka towarów w okresie *t* *k-*ty kupiec kieruje się swoją indywidualną funkcją użyteczności  rozwiązując zadanie:

znaleźć

  (5.2)

przy ograniczeniu budżetowym

 ,

 , (5.3)

gdzie

  (5.4)

jest dochodem, jaki uzyskuje  *k*-ty kupiec ze sprzedaży swojego koszyka  po cenach  *p*(*t*) (symbolem  oznaczamy iloczyn skalarny wektorów *x*, *y*; =).

 O funkcji użyteczności *k*-tego kupca  zakładamy standardowo, że jest ciągła i różniczkowalna na obszarze określoności oraz silnie wklęsła i rosnąca. Przy tym założeniu rozwiązaniem zadania (5.2) - (5.3) jest ciągła na  funkcja cen i dochodu:

 =

 =  *k*=1, 2,...,*m*. (5.5)

 Funkcje popytu  są dodatnio jednorodne stopnia 0. Taka samą własność mają zredukowane funkcje popytu , *k*=1, 2,...,*m* (zob. [6], rozdz. 3 ). Podobnie jak dotąd,

sumę



nazywamy wektorem popytu całkowitego na towary na rynku w okresie t . Sumę

**

nazywamy wektorem podaży towarów na rynku.

 Różnicę



nazywamy wektorem popytu nadwyżkowego na rynku w okresie t.

 Zajmiemy się dalej rynkiem, na którym dynamikę cen reguluje wektorowe równanie rekurencyjne:

  (5.6)

z dodatnim parametrem  i unormowanymi cenami w okresie początkowym

  (5.7)

( tutaj i wszędzie dalej  ).

 W układzie (5.6) ceny są unormowane  Jeżeli  (nadmiar *i* - tego towaru na rynku w okresie t), to wprawdzie , ale niekoniecznie

.

 Podobnie, jeżeli  (niedobór *i -* tego towaru na rynku w okresie *t* ), to wprawdzie , ale niekoniecznie

.

 Wreszcie, gdy , to oczywiście  , natomiast niekoniecznie

,

jak to ma miejsce w klasycznym modelu rynku.

 Analiza układu (5.6) upoważnia nas jedynie do stwierdzenia, że przedstawia on taki mechanizm kształtowania cen na rynku, który wpływa hamująco, z jednej strony, na wzrost cen towarów będących w nadmiarze i, z drugiej strony, na spadek cen towarów cieszących się dużym (niezaspokojonym) popytem.

 Klasyczna reguła:

* jeżeli , to ,
* jeżeli , to 

zachodzi tylko w szczególnych okolicznościach, o niektórych z nich mówi poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 5.1.** *Jeżeli w gospodarce z równaniem dynamiki cen* (6) *w okresie t spełniony jest warunek*



*oraz*



*to*

.

**Dowód.** Mamy (zgodnie z (5.6) )

 ,

zatem, gdy , to



Z założenia

 ,

 .

tym samym

.

 Dowód drugiej części twierdzenia przebiega analogicznie.

 Warunek  nie ma wprawdzie interpretacji ekonomicznej (wymaga bowiem dodawania m.in. towarów o różnych mianach), ale zachodzi np. wówczas, gdy na rynku obserwujemy niedobór (większości lub wszystkich) towarów. Podobnie, warunek  zachodzi, gdy na rynku generalnie mamy do czynienia z nadwyżką podaży nad popytem.

**5.2 Stabilność globalna rynku**

Dalej wygodnie będzie przyjąć oznaczenie

,

dzięki czemu równanie (5.6) można zapisać w równoważnej, prostszej postaci

 . (5.8)

Zauważmy, że ≩ 0 ( ).

Zakładamy, że:

**(I)** Odwzorowanie  jest zwężające na ,

 tj. spełnia warunek 

oraz

 ,

**(II)**  (Prawo Walrasa)

 ≩ 0 ().

Rynek jest w równowadze, jeżeli ustaliły się na nim takie ceny ≩ 0, przy których

.

Wektor , podobnie jak dotąd nazywamy wektorem cen równowagi rynkowej.

Nietrudno zauważyć, że również obecnie ceny równowagi rynkowej są określone z dokładnością do struktury, tzn. spełniają warunek:

 jeżeli , to .

 Rozpatrzmy układ (5.6) (lub równoważny układ (5.8) z warunkiem początkowym (5.1) i unormowanymi cenami (5.7) w okresie początkowym.

**Definicja 5.1.**  *Ciąg wektorów  spełniający układ*  (5.6) *z warunkiem początkowym*  (5.1) *nazywamy - dopuszczalną trajektorią cen na rynku.*

Każda ** - dopuszczalna trajektoria cen na rynku składa się wyłącznie z unormowanych wektorów cen: dla  *t*=1, 2,... z definicji odwzorowania (5.6), dla *t*=0 na mocy warunku (5.7).

**Definicja 5.2.** *Rynek nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli*

1. 
2.  *każda -dopuszczalna trajektoria cen  spełnia warunek* :



 Udowodnimy, że przy przyjętych założeniach rynek konkurencyjny z równaniem dynamiki cen (5.6) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

**Twierdzenie 5.2.** *Przy założeniach* (I), (II)

**(i)** *istnieje dokładnie jeden unormowany wektor cen równowagi rynkowej,*

**(2i)** *rynek jest globalnie asymptotycznie stabilny.*

**Dowód. (i)** Udowodnimy najpierw, że odwzorowanie  zdefiniowane w (8) jest ciągłe. W tym celu weźmy dowolny wektor  oraz ciąg  zbieżny do  *p*. Odwzorowanie  jest zwężające na , więc istnieje taka liczba , że

,

zatem  zawsze, gdy  czyli .

 Weźmy teraz dowolny wektor cen  i utwórzmy ciąg  spełniający równanie (5.8) i warunek początkowy (5.1). Pokażemy, że otrzymany w ten sposób ciąg jest ciągiem Cauchy'ego. W tym celu weźmy dowolne liczby , . Wówczas

==

 =

   +

 +  

   =

 =  .

 Tak więc , tym samym  jest ciągiem Cauchy'ego. Istnieje więc taki wektor  że  a ponieważ  i zbiór  jest zwarty, więc .

 Łatwo zauważyć, że  Rzeczywiście, ponieważ  więc . Odwzorowanie  jest ciągłe, czyli

  (\*)

 Pokażemy, że w zbiorze  istnieje dokładnie jeden wektor spełniający warunek (\*). W tym celu załóżmy, a contrario, że

 .

Wówczas

,

gdzie  co jest możliwe jedynie, gdy . Z warunku (\*) wynika, że

 , (\*\*)

tzn.

,

czyli



( w myśl prawa Walrasa , a to oznacza, że . Z (\*\*) wynika wówczas, że



i wobec tego



**(2i)** W części **(i)** wykazaliśmy, że każda  -dopuszczalna trajektoria cen jest ciągiem Cauchy'ego zbieżnym do granicy  co dowodzi globalnej asymptotycznej stabilności rynku z równaniem (5.6) dynamiki cen.

 Przy założeniach **(I)**, **(II)** każda dopuszczalna trajektoria cen jest przynajmniej półdodatnia. Ponieważ zerowe ceny, aczkolwiek teoretycznie możliwe, w praktyce raczej nie występują, nasuwa się pytanie czy, ewentualnie w jakich okolicznościach, przy założeniach dopuszczalną trajektorię cen tworzą wyłącznie wektory dodatnie. Dla porządku każdą dopuszczalną trajektorię cen złożoną wyłącznie z dodatnich wektorów cen nazywać będziemy *właściwą.*

**Twierdzenie 5.3.**  *Jeżeli ceny równowagi rynkowej tworzą wektor , to przy założeniach* **(I)**, **(II)** *istnieje taka liczba , że każda**dopuszczalna trajektoria cen spełniająca równanie* (5.8) *i warunek  jest właściwa.*

**Dowód.** Ponieważ  więc

 ().

Weźmy wektor cen {}.

Oczywiście,0. Utwórzmy ciąg spełniający równanie ) i warunek początkowy  Wówczas

,

tzn.

 , czyli .

 Załóżmy, że *p*(*t*) dla . Wtedy

,

czyli p(t+1) , tzn. . Tym samym , o ile tylko początkowy wektor cen spełnia warunek 

**5.3. Wersja zmodyfikowana modelu**

 Dotąd interesował nas rynek z równaniem dynamiki cen (5.6) (lub równoważnym równaniem (5.8)), dodatnim parametrem  i unormowanymi cenami w okresie początkowym.

 Łatwo pokazać, że bez założenia **(I)** równanie (5.6) może generować, ujemne (przynajmniej po niektórych współrzędnych) ceny. Wystarczy, dla przykładu, wziąć rynek z dwoma towarami i dwoma kupcami kierującymi się funkcjami użyteczności typu Cobba – Douglasa

 

 

z parametrami ,  (*i*=1,2) i koszykami towarów ≩0, ≩0 spełniającymi warunki:

  

 ,

 ,

gdzie

 

, a przyjmując w (6)  i biorąc ceny początkowe *p*(0) otrzymujemy:

,,… .

 Aby uniknąć cen ujemnych bez konieczności odwoływania się do założenia **(I)**, równanie (5.6) zastąpimy obecnie równaniem

 , (5.9)

gdzie

 

 = (,…,).

 Oczywiście,  oraz .

 O funkcji popytu nadwyżkowego *z*(*p*) dodatkowo będziemy zakładać, że spełnia następujący standardowy warunek:

**(III)** 

(popyt na towar oferowany za darmo zawsze przekracza jego podaż, zob. założenie (2) w p. 4.1).

 Przy założeniach **(II)**, **(III)** rozwiązanie układu (5.9) z warunkiem początkowym (5.1)

  jest określone , a wektor cen równowagi rynkowej  jest dodatni. Rzeczywiście, załóżmy że

 

dla pewnego . Wówczas

 , (5.10)

zatem

 

(w myśl prawa Walrasa), czyli  i zgodnie z (10) , co pozostaje w sprzeczności z założeniem **(III)**. Podobnie, jeżeli , to przy założeniu **(III)** , co przeczy definicji cen równowagi rynkowej.

 Przy założeniach **(II)**, **(III)** w układzie (5.1), (5.9) ceny są więc zawsze co najmniej półdodatnie i unormowane .

Przyjmując oznaczenie:

   (5.11)

dalej obok równania rekurencyjnego (9) będziemy rozpatrywać równoważne równanie

 . (5.12)

Założenie **(I)** zastąpimy obecnie słabszym założeniem głoszącym, że

**(I’)** Odwzorowanie  jest zwężające.

Subtelna różnica między tym założeniem i założeniem **(I)** polega na tym, że obecnie funkcja  odwzorowuje simpleks jednostkowy w siebie na mocy definicji (a nie z założenia, jak to miało miejsce w punktach 1,2).

 Podobnie jak dotąd, ceny równowagi rynkowej tworzy wektor  ≩ 0, dla którego .

 O ciągu wektorów  spełniających układ (5.9) z warunkiem początkowym (5.1) tradycyjnie mówimy, że tworzy  - dopuszczalną trajektorię cen na rynku.

**Twierdzenie 5.4.** *Przy założeniach* **(I’), (II), (III)**

1. *na rynku z równaniem dynamiki cen* (5.9) *istnieje dokładnie jeden wektor cen równowagi rynkowej określony z dokładnością do struktury.*

**(2i)** *rynek* *jest globalnie asymptotycznie stabilny.*

 Dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 5.2.

 ■

 Do układu równań dynamiki cen (5.9) stosuje się także twierdzenie 5.3.

* 1. **Stabilność lokalna**

 W twierdzeniu 5.4 (2i) fundamentalną rolę gra założenie **(I’)**, że odwzorowanie (5.11) jest zwężające. Nie ma specjalnych argumentów, które przemawiałyby za jego odrzuceniem, lub za jego przyjęciem, dlatego spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jak zachowa się rynek z równaniem dynamiki cen (5.9), gdy założenie to zostanie uchylone.

 Założenie **(I’)** zastąpimy znacznie słabszym założeniem głoszącym, że:

**(I”)** *Odwzorowanie  jest ciągłe na  oraz różniczkowalne (gładkie) na* .

 Zauważmy najpierw, że przy założeniu **(III)** ceny równowagi rynkowej  we wszystkich rozpatrywanych wersjach modelu rynku tworzy wektor dodatni.

 Rzeczywiście, przy założeniu **(III)** ≩0 ,

w szczególności



a ponieważ , więc 

 Odwzorowanie  jest zatem różniczkowalne w otoczeniu cen równowagi.

Ceny równowagi rynkowej  tworzą stan stacjonarny układu (5.12), spełniający warunek

.

 Oznaczmy przez *A*  macierz Jacobiego (*n*,*n*) pochodnych cząstkowych odwzorowania  w punkcie :

 . (5.13)

 Liniowe równanie różnicowe

  (5.14)

nazywamy aproksymacją liniową (nieliniowego) układu (5.9) (lub równoważnego układu (5.12)) w otoczeniu stanu stacjonarnego.

 Układ (5.14) jest globalnie asymptotycznie stabilnym w 0, jeżeli każde jego rozwiązanie (rozpoczynające się w dowolnym punkcie  ) jest przy  asymptotycznie zbieżne do 0.

Natomiast stan stacjonarny  układu (5.9) nazywamy lokalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli spełnia warunek:



gdzie 

 Jeżeli układ (5.14) jest globalnie asymptotycznie stabilny w 0, to stan stacjonarny  układu (5.9) jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny.

 Macierz *A* układu (5.14) nazywamy stabilną, jeżeli wszystkie jej wartości własne mają moduły mniejsze od 1. Jeżeli *A* jest macierzą stabilną, to układ (5.14) jest globalnie asymptotycznie stabilny w 0.

 Z twierdzenia Brouwera (rozdz. 4, twierdzenie 4.2) wynika zatem, że przy założeniach **(I”) - (III)** istnieją (niekoniecznie określone jednoznacznie) ceny równowagi rynkowej 

 Otrzymujemy w ten sposób następujące warunki co najmniej lokalnej asymptotycznej stabilności rynku z równaniem dynamiki cen (5.9).

**Twierdzenie 5.5. (i)** *Jeżeli rynek z równaniem dynamiki cen (5.9) spełnia założenia* **(I”) -** **(III)**, *to ma on jeden wektor cen równowagi *

 **(2i)** *Jeżeli ponadto macierz funkcyjna Jacobiego*



*jest stabilna, to rynek jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny w otoczeniu wektora cen równowagi .*

 Liczbę

  (5.15)

nazywamy normą macierzy (operatora) *A*. Wprost z definicji wynika, że



(przypominamy, że ).

**Twierdzenie 5.6.** *Macierz A jest stabilna, gdy*

.

**Dowód.** Niech  oznacza wartość własną macierzy *A* oraz  odpowiadający jej (prawy) wektor własny:

, 

Wówczas

,

czyli (wobec (15) )

,

co zamyka dowód.

 Przy założeniach **(I”) – (III)** rynek z równaniem dynamiki cen (5.9) jest zatem co najmniej

 lokalnie asymptotycznie stabilny w otoczeniu cen równowagi , jeżeli suma wartości bezwzględnych elementów kolumn macierzy Jacobiego  jest mniejsza od 1.