**Emil Panek**

**Wykłady 14 - 15.** **Równowaga ogólna**

**7.1. Gospodarka konkurencyjna Arrowa-Debreu-McKenziego (AD-Mc). Ujęcie statyczne.**

 W gospodarce mamy *m* podmiotów gospodarczych nazywanych dalej producentami oraz *l* podmiotów, które nazywamy umownie konsumentami. Jedni i drudzy są zainteresowani kupnem lub sprzedażą określonych towarów, których liczbę oznaczamy przez *n*. W odróżnieniu od modelu gospodarki konkurencyjnej Leontiefa-Walrasa, nie czynimy specjalnego rozróżnienia między towarami konsumpcyjnymi i czynnikami produkcji. O tym czy pewien towar będzie w konkretnej sytuacji dobrem przez producenta wytwarzanym, czy zużywanym w charakterze czynnika wytwórczego, decydować będzie (dalej) znak z jakim towar taki w równaniach modelu zostanie uwzględniony w bilansie produkcji.

 Zbiory producentów i konsumentów nie muszą być rozłączne (i w praktyce nie są – dlaczego?). Producentami mogą być zarówno osoby fizyczne, jak i wszelkie instytucje (warsztaty, zakłady produkcyjne, usługowe, kombinaty, koncerny, korporacje etc.) wytwarzające różnorodne towary (i usługi). Podobnie konsumentami mogą być osoby fizyczne, gospodarstwa domowe, jednostki użyteczności publicznej, organizacje charytatywne, zakłady opieki społecznej etc., słowem – wszelkie instytucje dysponujące dochodami, które przeznaczają na zakup towarów i usług.

 Gospodarka jest maksymalnie zdecentralizowana w tym sensie, że każdy podmiot podejmuje decyzje niezależnie, kierując się własnymi przesłankami racjonalnego działania. Żaden podmiot nie ma wpływu na ceny towarów. Ceny kształtują się swobodnie w wyniku gry rynkowej i są dla wszystkich podmiotów ekonomicznych niezależnymi parametrami rynku. Celem działalności każdego producenta jest maksymalizacja zysku. Konsumenci podejmują swoje decyzje kierując się zasadą maksymalizacji użyteczności nabywanych koszyków towarów. Gdy w gospodarce ustalą się takie ceny, przy których: a) wszyscy producenci maksymalizują swoje zyski, b) wszyscy konsumenci realizują swoje preferencje (nabywają te towary, których posiadanie w ramach dostępnego budżetu daje im maksymalną satysfakcję), c) popyt na towary w gospodarce znajduje pokrycie w ich podaży wtedy mówimy, że gospodarka znajduje się w stanie równowagi konkurencyjnej. Ceny, przy których gospodarka osiąga stan równowagi konkurencyjnej, nazywamy cenami równowagi.

 Przez ,  , oznaczamy dalej zredukowaną przestrzeń produkcyjną *j*-tego producenta (zob. wykład 10-11, def.1.2). Dodatnie elementy wektora  interpretujemy jako wytworzoną produkcję czystą (netto), a ujemne jako nakład netto towarów (czynników) poniesiony przez *j*-tego wytwórcę. O zredukowanych przestrzeniach produkcyjnych ,  zakładamy, że spełniają następujące warunki:

**(I)** 

**(II)** 

**(III)** Zbiory  są zwarte (ograniczone i domknięte w  ) i silnie wypukłe.

 Warunek (I) zapewnia, że racjonalnie postępujący podmiot nigdy nie poniesie straty, gdyż zawsze może zaprzestać produkcji wybierając wektor . Zgodnie z warunkiem (II) przestrzeń  nie zawiera wektorów półdodatnich (ani dodatnich), tzn. jeżeli , to co najmniej jedna składowa wektora  musi być ujemna. Oznacza to po prostu, że po pierwsze, aby cokolwiek wytworzyć, trzeba ponieść nakłady oraz, po drugie, że w każdym procesie produkcji występują towary, których zużycie przekracza produkcję ( w naszej interpretacji będą to czynniki produkcji). Zwartość, o której mowa w (III) oznacza że a) możliwości (moce) produkcyjne każdego wytwórcy są ograniczone(żaden producent nie może ponosić dowolnie dużych nakładów ani nieograniczenie zwiększać produkcji), b) granica każdego ciągu procesów dopuszczalnych jest procesem dopuszczalnym, c) wytwarzane towary są doskonale podzielne.

 Oznaczmy przez  wektor cen towarów w gospodarce. Podejmując decyzję o rozmiarach produkcji *j*-ty producent wybiera taki technologicznie dopuszczalny wektor produkcji , który przy cenach *p* zapewnia mu maksymalny zysk, czyli rozwiązuje zadanie:

Znaleźć

  (7.1)

p.w.

 . (7.2)

 Jest to zadanie maksymalizacji funkcji (formy) liniowej, a więc ciągłej, na silnie wypukłym, zwartym zbiorze. O warunkach istnienia rozwiązania tego zadania mówi poniższe twierdzenie.

**□ Twierdzenie 7.1.** *Niech f będzie funkcją z  do . Jeżeli  oraz zbiór X jest zwarty, to  :*

 

 

■

 Oczywiście, zadanie (7.1)-(7.2) spełnia warunki tego twierdzenia, zatem  :

  .

 

 Pokażemy, że przy przyjętych założeniach rozwiązanie zadania (6.1) – (6.2) nie tylko istnieje, ale jest jednoznaczne (tym samym jest funkcją cen *p*).

**□ Twierdzenie 7.2.** *Przy założeniu (III) każdemu dodatniemu wektorowi cen p odpowiada dokładnie jedno rozwiązanie*

  (\*)

*zadania (7.1) – (7.2) . Tym samym odwzorowanie  postaci (\*) jest funkcją.*

**Dowód.**  Ze zwartości zbioru  i ciągłości formy liniowej  wynika (w świetle twierdzenia 7.1), że zadanie (\*) ma co najmniej jedno rozwiązanie. Załóżmy, że dla pewnego wektora cen  rozwiązanie to jest niejednoznaczne, czyli istnieją co najmniej dwa takie różne wektory  , że

 .

Weźmy dowolny wektor  , gdzie  są liczbami dodatnimi o sumie 1. Oczywiście  oraz, (wobec silnej wypukłości zbioru ) istnieje takie -otoczenie wektora , które w całości należy do :

  .

Oznacza to jednak, że istnieje taki wektor  , że  , a wobec tego

  ,

co przeczy wyborowi wektorów  i tym samym kończy dowód.

■

 Twierdzenie 7.2 pozostaje prawdziwe, gdy założenie (III) zastąpimy słabszym warunkiem głoszącym, że zbiory  są silnie wypukłe, domknięte i ograniczone z góry.

**∆ Definicja 7.1.** (i) *Funkcję wektorową  przyporządkowującą każdemu dodatniemu wektorowi cen p rozwiązanie  zadania (7.1)-(7.2) maksymalizacji zysku producenta nazywamy funkcją podaży towaru.*

 (2i) *Funkcję *

*postaci  nazywamy funkcją zysku producenta (firmy).*

▲

 Z podobnymi funkcjami mieliśmy już do czynienia wcześniej (w teorii firmy) z tym, że wówczas przy opisie działalności przedsiębiorstwa korzystaliśmy z funkcji produkcji. Obecnie stosujemy znacznie ogólniejsze podejście, wykorzystujące koncepcję przestrzeni produkcyjnych.

 Zwracamy uwagę, że funkcja podaży towarów wyjaśnia jak pod wpływem cen zmienia się zarówno podaż towarów wytwarzanych przez firmę (dodatnie składowe), jak i popyt na towary (czynniki), które są w firmie zużywane (składowe ujemne).

**□ Twierdzenie 7.3.** *Przy założeniach* (I)-(III)

1. *funkcja podaży  jest ciągła na obszarze określoności i dodatnio jednorodna stopnia 0,*
2. *funkcja zysku  jest ciągła na obszarze określoności i dodatnio jednorodna stopnia 1.*

■

 Dla uproszczenia zakładamy dalej, że przestrzenią towarów interesujących konsumentów jest cały nieujemny orthant *n*-wymiarowej przestrzeni Euklidesa, tj. zbiór . Konsumenci mają określone swoje indywidualne funkcje użyteczności  oraz dysponują pewnymi wektorami towarów ,  , które nazywamy umownie *zapasami* (mogą to być zapasy towarów w znaczeniu dosłownym, jak i np. oferty czynników produkcji będących akurat w posiadaniu konsumentów, np. pracy lub kapitału finansowego). Tak więc konsumenci są z jednej strony odbiorcami towarów (konsumpcyjnych) wytwarzanych przez producentów, z drugiej strony dostarczycielami towarów będących ich własnością (czynników wytwórczych) takich jak np. praca, ziemia czy kapitał finansowy (gotówka, którą są gotowi zainwestować przeznaczając na uruchomienie działalności produkcyjnej. W zamian za udziały w zyskach). Wektory towarów interesujących konsumentów nazywamy tradycyjnie koszykami towarów. Koszyk towarów interesujących konsumenta *k* oznaczamy przez  , natomiast wektor towarów wytwarzanych przez *j*-tego producenta oznaczamy symbolem  . W myśl definicji 7.1(i)  oraz zgodnie z twierdzeniem 7.3(i)  , . Zakładamy, że funkcje użyteczności konsumentów  , , spełniają standardowe warunki, tj. są ciągłe i dwukrotnie różniczkowalne, rosnące i silnie wklęsłe (zob. wykład 4). Ustalone są ponadto udziały  poszczególnych konsumentów w zyskach producentów, spełniające warunek:  ,  .

 Jeżeli w gospodarce obowiązują ceny  , to na dochód  konsumenta *k* składają się:

1. jego udziały w zyskach poszczególnych producentów (oczywiście, tam gdzie konsument udziały takie posiada, tj. gdzie odpowiednie współczynniki  są dodatnie),
2. dochody ze sprzedaży zapasu towarów  .

Zatem

  ,

  .

 Wybierając interesujący go koszyk towarów  *k*-ty konsument, bez względu na ceny, tj. dla każdego , rozwiązuje zadanie:

znaleźć

  (7.3)

p.w.

  (7.4)

  .

Zatem

  ,

  ,

 . Funkcję  nazywamy (zredukowaną) *funkcją popytu k-tego konsumenta*. Przy przyjętych założeniach o funkcjach użyteczności  funkcje popytu  są ciągłe na obszarze określoności i dodatnio jednorodne stopnia 0 (zob. wykład 5-6).

**∆ Definicja 7.2.** *Mówimy, że w gospodarce A-D-Mc spełniony jest globalny bilans popytu i podaży, jeżeli producenci wytwarzają takie wektory produkcji  ,  , a konsumenci wybierają takie koszyki towarów  , że spełniony jest warunek:*

  .

▲

 Spełnienie globalnego bilansu popytu i podaży oznacza, że w skali całej gospodarki dostępna masa towarów (w tym także czynników produkcji) wystarcza na zaspokojenie popytu. Obok powyższego globalnego bilansu (rzeczowego) popytu i podaży spełnione są indywidualne bilanse dochodów i wydatków wszystkich konsumentów, co wyjaśnia poniższa definicja.

**∆ Definicja 7.3.** *Mówimy, że spełniony jest indywidualny bilans dochodów i wydatków k-tego konsumenta, jeżeli wybiera on taki koszyk towarów  , którego wartość nie przekracza jego dochodu:*

  ,  .

▲

 Cały czas implicite zakładamy, że producenci kierują się kryterium maksymalizacji zysku, a konsumenci kryterium maksymalizacji swoich funkcji użyteczności. Prowadzi to do następującej kluczowej definicji równowagi konkurencyjnej w gospodarce A-D-Mc.

**∆ Definicja 7.4.** *O układzie wektorów  mówimy, że charakteryzuje gospodarkę konkurencyjną A-D-Mc w równowadze, jeżeli spełnia on następujące cztery bloki warunków:*

1. *Każdy producent maksymalizuje swój zysk przy cenach :*

  ,  .

 *(2i)* *Spełnione są indywidualne bilanse dochodów i wydatków poszczególnych konsumentów:*

 * &  ,*

*gdzie*

 * ,  ,*

 * ,*  .

 *(3i) Każdy konsument wybiera najlepszy jego zdaniem koszyk towarów :*

 *,* $k=1, …, l.$

 *(4i) Spełniony jest globalny bilans popytu i podaży:*

 * .*

▲

 Wektor  nazywamy wektorem cen równowagi (cenami równowagi). Nietrudno zauważyć, że jeżeli  jest wektorem cen równowagi (spełniającym warunki (i)-(4i) definicji 7.4), to jest nim także dowolny wektor , . Innymi słowy, ceny równowagi konkurencyjnej w gospodarce A-D-Mc (podobnie jak ceny równowagi rynkowej na rynku Arrowa-Hurwicza) są określane z dokładnością do struktury. Mając ceny równowagi  możemy wyznaczyć wszystkie pozostałe wektory  , o których mowa w definicji 7.4, tj. wektory popytu na towary zgłaszanego przez poszczególnych konsumentów

  , 

i produkcji wytwarzanej przez poszczególnych producentów

  , .

Kluczową rolę w równowadze grają więc ceny .

Oznaczmy przez

 

popyt całkowity na towary, a przez

 

podaż całkowitą towarów w gospodarce przy cenach *p* (dowolnych cenach  , nie tylko w równowadze).

**∆ Definicja 7.5.** *Różnicę*

 **

*nazywamy funkcją popytu nadwyżkowego (popytem nadwyżkowym) w gospodarce A-D-Mc przy cenach p.*

▲

 O funkcji popytu nadwyżkowego  zakładamy, że spełnia następujące trzy warunki (por. podobne założenia (R1)-(R3)) o funkcji popytu nadwyżkowego na rynku konkurencyjnym, wykład 7-8):

**(IV)** ∖{0})

**(V)** 

**(VI)**  , ∖

┌ < 0 ,

gdzie

 .

 Interpretacja ekonomiczna tych warunków jest analogiczna jak interpretacja podobnych warunków w modelu rynku konkurencyjnego Arrowa-Hurwicza (zob. wspomniany wyżej wykład 7-8).

Zauważmy, że warunek (4i) definicji 7.4 stanu równowagi konkurencyjnej (globalnego bilansu popytu i podaży) możemy teraz zapisać w równoważnej postaci:

 .

 Funkcja popytu nadwyżkowego  ma takie same własności, jak funkcja  na rynku konkurencyjnym Arrowa-Hurwicza, m.in.  dla dowolnego dodatniego wektora cen *p* (prawo Walrasa). W szczególności , a ponieważ wektor cen  w równowadze jest dodatni, więc  , co oznacza, że przy założeniach (IV)-(VI) warunek (4i) definicji 7.4 stanu równowagi konkurencyjnej spełniony jest z równością:

 .

 Łatwo też sprawdzić, że funkcja  jest dodatnio jednorodna stopnia 0:

   .

W związku z tym prawdziwe jest następujące twierdzenie (o istnieniu stanu równowagi konkurencyjnej w gospodarce A-D-Mc).

**□ Twierdzenie 7.4.** *Przy założeniach (IV)-(VI) w gospodarce A-D-Mc istnieje dokładnie jeden stan równowagi konkurencyjnej z cenami  określonymi z dokładnością do struktury.*

**Dowód.** Przy założeniach (IV)-(VI) istnieje tylko jeden wektor cen  (określony z dokładnością do struktury), przy którym  (dowód – E. Panek, Ekonomia matematyczna, Wyd. AEP Poznań 2003, twierdzenia 3.1, 3.2; należy tylko odwzorowanie  zastąpić odwzorowaniem ).

 Wektorowi cen  odpowiadają jednoznacznie określone wektory popytu  ,  oraz podaży (produkcji)  , . Warunki twierdzenia spełnia wyznaczony w ten sposób układ wektorów (macierz)

 

■

**7.2. Gospodarka A-D-Mc. Ujęcie dynamiczne**

 Wprowadźmy (ciągłą) zmienną czasu *t* i oznaczmy przez  wektor cen towarów w momencie *t*. Podobnie niech  oznacza wektor produkcji wytwarzanej przez *j*-tego wytwórcę w momencie *t*, zaś  koszyk towarów interesujących *k*-tego konsumenta w tym momencie.

 Dynamikę cen w gospodarce A-D-Mc opisywać będzie znany już nam z modelu rynku Arrowa-Hurwicza standardowy układ równań różniczkowych

  (7.5)

z warunkiem początkowym

  (7.6)



Jeżeli w chwili *t*  popyt na towar *i*-ty będzie większy od jego podaży, tj. , wtedy  , zatem cena tego towaru wzrośnie jeżeli popyt będzie niższy od podaży,  , wtedy  i cena towaru spadnie, etc. Parametr  reguluje prędkość, z jaką ceny reagują na popyt i podaż (im  większe, tym reakcja jest gwałtowniejsza).

**∆ Definicja 7.6.** *(i) Dodatnie na półosi czasu  rozwiązanie układu (7.5) z warunkiem początkowym (7.6) nazywamy tradycyjnie -dopuszczalną trajektorią cen (w gospodarce A-D-Mc).*

 *(2i) Jeżeli  jest -dopuszczalną trajektorią cen, to funkcje*

 * , *

*nazywamy dopuszczalnymi trajektoriami podaży (produkcji wytwarzanej przez poszczególnych producentów), a funkcje*

 * ,  ,*

*nazywamy dopuszczalnymi trajektoriami popytu (zgłaszanego przez poszczególnych konsumentów).*

 *(3i) Wiązka trajektorii*

**

*tworzy dopuszczalny proces wzrostu w gospodarce konkurencyjnej A-D-Mc.*

▲

 Układ (7.5)-(7.6) z matematycznego punktu widzenia nie różni się od układu (4.1), (4.6) (wykład 7-8), a założenia (IV)-(VI) są identyczne z założeniami (R1)-(R3) na temat rynku konkurencyjnego Arrowa-Hurwicza(wykład 7-8).

Przy założeniach (IV)-(VI) każde rozwiązanie układu (7.5) z warunkiem (7.6) jest dodatnie na obszarze określoności i leży na powierzchni kuli *n*-wymiarowej o promieniu  , ze środkiem w 0.

Dowody tych faktów otrzymujemy powtarzając dosłownie dowody analogicznych własności trajektorii cen na rynku Arrowa-Hurwicza (wykład 7-8), zastępując funkcję popytu nadwyżkowego na rynku konkurencyjnym  przez funkcję $F\left(p\right).$

 Zwracamy uwagę, że w równowadze konkurencyjnej w gospodarce A-D-Mc ceny określone są z dokładnością do struktury, natomiast produkcja i popyt są wyznaczane jednoznacznie. Innymi słowy, jeżeli macierz  charakteryzuje gospodarkę w równowadze, to także każdy układ wektorów  , gdzie  wyznacza stan równowagi konkurencyjnej w takiej gospodarce. Półprostą  nazywamy promieniem cen równowagi w gospodarce A-D-Mc.

**∆ Definicja 7.7.** *Gospodarkę konkurencyjną A-D-Mc nazywamy globalnie asymptotycznie stabilną, jeżeli  *

 **

 * ,  ,*

 * ,  .*

▲

**□ Twierdzenie 7.5.** *Jeżeli funkcje podaży towarów  i popytu   są ciągłe na  , to przy założeniach (IV)-(VI) gospodarka konkurencyjna A-D-Mc jest globalnie asymptotycznie stabilna.*

**Dowód.** Z twierdzenia 4.2 (E. Panek, Ekonomia matematyczna, rozdz. 4, punkt 4.1.2) wynika, że przy założeniach (IV)-(VI) każda -dopuszczalna trajektoria cen jest asymptotycznie zbieżna do pewnego wektora cen  (z dowodu wynika, że jest to punkt przebicia kuli *n*-wymiarowej o promieniu  przez promień cen równowagi *P*). Z kolei z ciągłości funkcji  wynika, że jeżeli  , to

  ,  .

Podobnie ciągłość funkcji popytu  gwarantuje, że jeżeli  , to

  ,  .

■

**7.3. Gospodarka konkurencyjna z cenami względnymi. Stabilność lokalna**

 Wyrażając ceny pierwszych *n*-1 towarów w jednostkach towaru *n*-tego redukujemy promień cen równowagi  do punktu

 

gdzie  jest dowolnym wektorem z promienia *P*.

Funkcja popytu nadwyżkowego  w układzie (7.5) jest dodatnio jednorodna stopnia 0, zatem taki sam popyt nadwyżkowy towarzyszy cenom  oraz cenom , co prowadzi do następującego układu  równań dynamiki cen:

  (7.7)

z funkcją popytu nadwyżkowego  i dodatnim parametrem  (cena *n*-tego towaru ). Niech  będzie dowolnym dodatnim wektorem cen (względnych) pierwszych  towarów w gospodarce w momencie :

 . (7.8)

 Wektorowa funkcja popytu nadwyżkowego  jest zredukowaną do pierwszych  współrzędnych funkcją popytu nadwyżkowego *F* z układu (7.5). Łatwo stąd wywnioskować, że przy założeniach (IV)-(V) każde rozwiązanie tego układu z warunkiem początkowym (7.8) jest – podobnie jak rozwiązanie układu (7.5)-(7.6) – dodatnie na półosi  . Tradycyjnie nazywamy je -dopuszczalną trajektorią cen (względnych). Mając -dopuszczalną trajektorię cen  i pamiętając, że  możemy wyznaczyć wszystkie odpowiadające tym cenom trajektorie produkcji

  ,  (7.9)

oraz popytu

  ,  (7.10)

w gospodarce A-D-Mc.

**∆ Definicja 7.8.** *O wiązce trajektorii*

 * ,*

*gdzie  jest -dopuszczalną trajektorią cen względnych, a trajektorie  ,  są wyznaczone zgodnie z (7.9), (7.10) mówimy, że tworzy dopuszczalny proces wzrostu w gospodarce konkurencyjnej A-D-Mc z cenami względnymi.*

▲

 Jeżeli  jest wektorem cen (bezwzględnych) w równowadze w gospodarce A-D-Mc z funkcją popytu nadwyżkowego *F* , czyli  , to oczywiście  jest wektorem cen (względnych) w równowadze w gospodarce z funkcją popytu nadwyżkowego . O ile jednak przy założeniach (IV)-(V) ceny  są określone z dokładnością do struktury (tworzą promień cen równowagi w *n*-wymiarowej przestrzeni cen), o tyle obecnie przy tych samych założeniach wektor cen  jest określony jednoznacznie (jest punktem w -wymiarowej przestrzeni cen względnych).

 Cenom względnym  w równowadze odpowiadają wektory podaży (produkcji) towarów

  , 

oraz popytu (koszyki towarów)

  ,  .

**∆ Definicja 7.9.** *O układzie wektorów*

 

*mówimy, ze opisuje stan równowagi konkurencyjnej w gospodarce A-D-Mc z cenami względnymi.*

▲

 Zwracamy uwagę, że wszystkie dotychczasowe wywody zawarte w tym punkcie (7.3) opierają się na założeniach (IV)-(V). Nie było jak dotąd wymagane spełnienie założenia (VI) słabej ujemnej półokreśloności ani macierzy funkcyjnej Jacobiego  , ani jej zredukowanej postaci  , co oznacza, że nie wykluczamy istnienia w gospodarce z cenami względnymi wielu stanów równowagi (z różnymi wektorami cen ).

**∆ Definicja 7.10.** *Stan równowagi  nazywamy lokalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli istnieje takie -otoczenie wektora cen  w -wymiarowej przestrzeni cen względnych, że*

* *każda -dopuszczalna trajektoria cen  rozpoczynająca się w punkcie  spełnia warunek:*

 * ,*

* *każda dopuszczalna trajektoria produkcji  spełnia warunek:*

 * ,  ,*

* *każda dopuszczalna trajektoria popytu  spełnia warunek*

 * ,  .*

▲

 Weźmy liczbę  i rozpatrzmy układ równań (7.7) w -otoczeniu wektora cen równowagi  . Ze wzoru Taylora otrzymujemy:

  ,

gdzie

 

jest macierzą kwadratową  . Zatem z (7.7) otrzymujemy:

  , (7.11)

jeżeli trajektoria cen  leży dostatecznie blisko wektora cen równowagi . Ograniczając się do członu liniowego aproksymacji (7.11) i przyjmując  oraz wprowadzając oznaczenie  otrzymujemy układ równań liniowych

  , (7.12)

który nazywamy *aproksymacją liniową (nieliniowego) układu* (7.7) w otoczeniu cen równowagi  (dla ).

**∆ Definicja 7.11.** (i) *Wektor  nazywamy stanem stacjonarnym (stanem równowagi) liniowego układu (7.12).*

 (2i) *Układ liniowy (7.12) nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym w 0, jeżeli każde jego rozwiązanie  określone na półosi  z dowolnym warunkiem początkowym*

 

*spełnia warunek:*

 .

▲

 Zwracamy uwagę, że nie ograniczamy rozwiązań układu (7.12) do funkcji nieujemnych (ani tym bardziej dodatnich). Jest to zrozumiałe, gdyż funkcje  nie są w (7.12) trajektoriami cen, lecz ich odchyleniami od cen równowagi, a te mogą być tak dodatnie, jak i ujemne.

**□ Twierdzenie 7.6.** *Stan równowagi konkurencyjnej z wektorem cen względnych  w gospodarce A-D-Mc z równaniem dynamiki cen (7.7) jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego aproksymacja liniowa (7.12) jest globalnie asymptotycznie stabilna w 0.*

■

 Analiza stabilności układu liniowego (7.12) nie sprawia trudności i sprowadza się do ustalenia znaków części rzeczywistych wartości własnych macierzy *A* , o czym mówi następujące twierdzenie.

**□ Twierdzenie 7.7.** *Liniowy układ (7.12) jest globalnie asymptotycznie stabilny w 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A mają ujemne części rzeczywiste.*

 D**owód** przedstawiamy w szczególnym przypadku, gdy wszystkie wartości własne macierzy  są różne i rzeczywiste. Wówczas rozwiązanie ogólne układu (7.12) ma postać

 

gdzie  , *c* jest dowolnym -wymiarowym wektorem kolumnowym,  jest *i*-tym (prawym) kolumnowym, wektorem własnym macierzy *A*, któremu odpowiada wartość własna  :

  , .

Jeżeli  ,  , to  :

  . (7.13)

 Załóżmy teraz, że  zachodzi (7.13) oraz  dla pewnego ,

np. dla  . Biorąc w (7.13) wektor  otrzymujemy:

 

co przeczy założeniu.

■

 Macierz *A* układu (7.12), której wszystkie wartości własne mają ujemne części rzeczywiste nazywamy *macierzą stabilną*. Łatwo pokazać, że

**□ Twierdzenie 7.8.** *Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy A są rzeczywiste i różne, wtedy jest ona stabilna, gdy jest ujemnie określona.*

**Dowód.** Mamy:

  , 

gdzie  jest *i*-tym (prawym) wektorem własnym, a  odpowiadającą mu wartością własną macierzy. Z ujemnej określoności *A* wynika, w szczególności, że dla  :

  ,

tzn.  .

■

[O warunkach ujemnej określoności macierzy mówi m.in. twierdzenie Sylwestera]

 Z przytoczonych twierdzeń płynie wniosek, że stan równowagi konkurencyjnej w gospodarce A-D-Mc z cenami względnymi jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny, gdy macierz

 

jest stabilna (w szczególności, gdy jest ujemnie określona).

**7.4. Gospodarka konkurencyjna A-D-Mc z cenami względnymi i czasem dyskretnym**

 Jeżeli czas zmienia się skokowo,  , wtedy odpowiednikiem układu równań różniczkowych (7.7) jest układ równań różnicowych

  (7.14)

lub inaczej (w wersji rekurencyjnej);

  , (7.14’)

gdzie

  .

Niech  będzie wektorem cen względnych w równowadze i  , lub równoważnie  . Rozkładając funkcję  w szereg Taylora w otoczeniu punktu równowagi  mamy:

  , (7.15)

skąd otrzymujemy:

  ,

gdzie

  (7.16)

Podstawiając  i ograniczając się do członu liniowego aproksymacji (7.15) otrzymujemy ostatecznie układ równań rekurencyjnych

 , (7.17)

który nazywamy aproksymacją liniową dyskretnego układu (nieliniowego) (7.14) w otoczeniu cen równowagi . Definicja (7.10) lokalnej asymptotycznej stabilności stanu równowagi konkurencyjnej w gospodarce A-D-Mc z cenami względnymi oraz definicja 7.11 globalnej asymptotycznej stabilności układu liniowego w 0 pozostają aktualne z tą tylko różnicą, że obecnie czas zmienia się skokowo przyjmując wartości całkowite  . Aktualne pozostają także założenia (IV)-(V) , które obowiązywały w punkcie 7.3. Analogiem twierdzenia 7.6 jest obecnie

**□ Twierdzenie 7.9.** *Stan równowagi konkurencyjnej z wektorem cen względnych  i równaniem dynamiki cen (7.14) jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego aproksymacja liniowa (7.17) jest globalnie asymptotycznie stabilna w 0.*

 Odpowiednikiem twierdzenia 7.7 jest poniższe twierdzenie o stabilności w 0 liniowego dyskretnego układu (7.17)

**□ Twierdzenie 7.10.** *Liniowy dyskretny układ (7.16) wtedy i tylko wtedy jest globalnie asymptotycznie stabilny w 0 , gdy moduły wszystkich wartości własnych macierzy B są mniejsze od 1.*

**Dowód** w szczególnym przypadku, gdy macierz *B* ma *n*-1 różnych, rzeczywistych wartości własnych. Wówczas rozwiązanie ogólne układu (7.17) ma postać:

 $c$,

gdzie

  ,  ,

 jest *i*-tym (prawym) wektorem własnym macierzy *B*,  jest odpowiadającą mu wartością własną,

  ,  .

Wobec tego, że wektor *c* przebiega całą przestrzeń  widzimy, że  wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne  spełniają warunek :

  , .

■

 Macierz *B* dyskretnego układu (7.17), której wszystkie wartości własne mają moduły mniejsze od 1 nazywamy *macierzą stabilną* tego układu.

Zwracamy uwagę, że ta sama nazwa (macierz stabilna)oznacza w tym przypadku co innego w zależności od tego, z jakim układem ją wiążemy (z czasem ciągłym czy dyskretnym).

Liczbę

 

nazywamy *normą macierzy (operatora)* *B*.

Wprost z definicji wynika, że

 

(tutaj  ). Łatwo pokazać, że

**□ Twierdzenie 7.11.** *Macierz  układu (7.16) jest stabilna, gdy*

 * .*

**Dowód**. Niech  będzie wartością własną macierzy *B*, oraz  odpowiadającym jej (prawym) wektorem własnym. Wówczas

 

czyli

  ,

gdzie

  ,  .

Wówczas  , co zamyka dowód.

■

 Przy założeniach (IV) , (V) gospodarka konkurencyjna z cenami względnymi i czasem dyskretnym i równaniem dynamiki cen (7.17) jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilna w otoczeniu cen równowagi  , gdy macierz Jacobiego *B* tego układu jest stabilna, w szczególności jeżeli suma wartości bezwzględnych elementów w każdej kolumnie tej macierzy jest większa od 1 (zadanie).

Wiemy, że jeżeli spełnione są założenia (IV)-(VI), to gospodarka konkurencyjna A-D-Mc z równaniem dynamiki cen bezwzględnych (7.5) jest globalnie asymptotycznie stabilna (twierdzenie 7.5). Przy tych samych założeniach z globalnej asymptotycznej stabilności gospodarki z cenami bezwzględnymi (układ 7.5) wynika globalna (a więc w szczególności także lokalna) asymptotyczna stabilność gospodarki z cenami względnymi (układ równań (7.7)).

Z twierdzeń 7.6, 7.7 płynie wniosek, że jeżeli spełnione są założenia (IV)-(VI), to wszystkie wartości własne macierzy *A* w układzie (7.12) mają ujemne części rzeczywiste. Zgodnie z twierdzeniami 7.9, 7.10 gospodarka A-D-Mc z cenami względnymi i czasem dyskretnym jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilna, gdy moduły wszystkich wartości własnych macierzy  są mniejsze od 1, co – jak pokażemy za chwilę – ma miejsce dla odpowiednio małych wartości parametru  .

 **□ Twierdzenie 7.12.** *Macierz A ciągłego układu*

 

*jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba , że  stabilna jest macierz  dyskretnego układu*

 * .*

**Dowód,** zob. E. Panek, Local stability of the competitive economy …, PUE Review No 2 (2008).

**Wniosek.** Przy założeniach (IV)-(VI)   gospodarka A-D-Mc z cenami względnymi i równaniem dynamiki cen (7.17) jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilna.