**WEiZ, kier. Ekonomia, 11EK-SD, 12EK-SD, Ekonomia matematyczna ćw. do wykł. 10-11 (2019/2020)**

**ZADANIE 1**. Wyprowadź wzór na izokwantę dwuczynnikowej funkcji produkcji Cobba-Douglasa

$f\left(k,z\right)=ak^{α}z^{β}$; $a, α, β>0; α+β\leq 1,$

$prze$chodzącą przez punkt $\left(k^{0},z^{0}\right)>0$.

***Rozwiązanie***  Mamy:

$f\left(k,z\right)=ak^{α}z^{β}=f\left(k^{0},z^{0}\right)=a\left(k^{0}\right)^{α}\left(z^{0}\right)^{β}$,

więc :

$k^{α}=\frac{C}{z^{β}}$, gdzie $C=\left(k^{0}\right)^{α}\left(z^{0}\right)^{β}$.

Zatem:

$k=Dz^{-\frac{β}{α}} $**, gdzie** $D=k^{0}\left(z^{0}\right)^{\frac{β}{α}}$**.**

Gdy $z\rightarrow +\infty $, wtedy $k=\frac{D}{z^{\frac{β}{α}}}\rightarrow 0+$, natomiast gdy $z\rightarrow +\infty $, wtedy $k=\frac{D}{z^{\frac{β}{α}}}\rightarrow +\infty $.

[***Zadanie do samodzielnego wykonania: sporządzić wykres izokwanty spełniającej powyższe warunki***]

**ZADANIE 2.** Dana funkcja produkcji Cobba-Douglasa:

 $f\left(k,z\right)=2k^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}$. (\*)

Oblicz:

1. Elastyczność produkcji względem kapitału’
2. Elastyczność produkcji względem (nakładów) pracy
3. Krańcową stopę substytucji kapitału przez pracę
4. Krańcową stopę substytucji pracy przez kapitał
5. Elastyczność substytucji kapitału przez pracę
6. Elastyczność substytucji pracy przez kapitał

***Rowiązanie***

Ad (**a**) $ε\_{k}^{f}=\frac{∂f}{∂k}∙\frac{k}{f}=\frac{\frac{1}{2}∙2∙k^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}∙k}{2k^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}$.

Ad (**b**) $ε\_{z}^{f}=\frac{∂f}{∂z}∙\frac{z}{f}=\frac{\frac{1}{3}∙2∙k^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{2}{3}}∙z}{2k^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3}$

Ad (**c**) $s\_{kz}^{f}=\frac{∂f}{∂k}:\frac{∂f}{∂z}=\frac{\frac{1}{2}∙2∙k^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}∙2∙k^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{2}{3}}}=\frac{3z}{2k}$

Ad (**d**) $s\_{zk}^{f}=\frac{∂f}{∂z}:\frac{∂f}{∂k}=\frac{\frac{1}{3}∙2∙k^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}∙2∙k^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}}=\frac{2k}{3z}$

Ad (**e**) $ε\_{kz}^{f}=\left(\frac{∂f}{∂k}:\frac{∂f}{∂z}\right)∙\frac{k}{z}=\frac{\frac{1}{2}∙2∙k^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}∙2∙k^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{2}{3}}}=\frac{3z}{2k}∙\frac{k}{z}=1,5$

Ad (**f**) $ε\_{zk}^{f}=\left(\frac{∂f}{∂z}:\frac{∂f}{∂k}\right)∙\frac{z}{k}=\frac{\frac{1}{3}∙2∙k^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}∙2∙k^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}}=\frac{2k}{3z}∙\frac{z}{k}= \frac{2}{3}=0,66(6)$

1. Czy funkcja produkcji (\*) jest dodatnio jednorodna stopnia 1 (tj. czy spełnia warunek proporcjonalności przychodów)?

**Odp**. Nie, gdyż suma wykładników $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1$

**ZADANIE 3.**  Wyprowadź wzór na wydajność pracy $w\left(u\right)$ (w zależności od technicznego uzbrojenia pracy $u$) w przypadku funkcji produkcji Cobba-Douglasa:

$y=f\left(k,z\right)=3k^{0,4}z^{0,6}$.

***Rozwiązani***e

$w\left(u\right)=\frac{y}{z}=\frac{3k^{0,4}z^{0,6}}{z}=3\left(\frac{k}{z}\right)^{0,4}=3u^{0,4}$ .

Wykaż, że w/w funkcja wydajności pracy $w\left(u\right)$ jest:

1. monotoniczne rosnąca
2. wklęsła
3. $\lim\_{u\to 0+}\frac{d}{du}w\left(u\right)=+\infty $

***Rozwiązanie***

Ad (**a** $\frac{d}{du}w\left(u\right)=3∙0,4∙u^{-0,6}=1,2 u^{-0,6}>0$; funkcja jest rosnąca przedziale $[0,\infty )$

Ad (**b**) $\frac{d^{2}}{du^{2}}w\left(u\right)=-\frac{18}{25}u^{-\frac{8}{5}}=-0,72u^{-1,6}<0$; funkcja jest wklęsa na $[0,\infty )$

Ad (**c**) $\lim\_{u\to 0+}\frac{d}{du}w\left(u\right)= \lim\_{u\to 0+}\frac{1,2}{u^{0,6}}=+\infty $.

**ZADANIE 4.** Wyprowadź wzór na zależność wydajności pracy $w\left(u\right)$ od technicznego uzbrojenia pracy w poniższej funkcji produkcji CES:

$y=f\left(k,z\right)=\left[3k^{\frac{1}{2}}+5z^{\frac{1}{2}}\right]^{2}$.

***Rozwiązanie***

$$w\left(u\right)=\frac{y}{z}=\frac{\left[3k^{\frac{1}{2}}+5z^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}{z}=\frac{\left[3k^{\frac{1}{2}}+5z^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}{\left[z^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}=\left[3\left(\frac{k}{z}\right)^{\frac{1}{2}}+5\left(\frac{z}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}=$$

$=\left[3u^{\frac{1}{2}}+5\right]^{2}$*.*

**ZADANIE 5.** Wykaż, że wydajność pracy $w\left(u\right)$ w zadaniu 4:

1. Rośnie wraz ze wzrostem technicznego uzbrojenia pracy,
2. Rośnie gasnąco (czyli coraz wolniej, czego syndromem - w przypadku funkcji rosnących - jest jej wklęsłość)
3. Spełnia warunek: $\lim\_{u\to 0+}\frac{d}{du}w\left(u\right)=+\infty $

***Rozwiązanie***

Ad (**a**)$ \frac{d}{du}w\left(u\right)=2\left(3u^{\frac{1}{2}}+5\right)∙\frac{3}{2}∙u^{-\frac{1}{2}}=9+15u^{-\frac{1}{2}}>0$; funkcja rośnie na [0,$\infty )$

Ad **(b)**$ \frac{d^{2}}{du^{2}}w\left(u\right)=-\frac{15}{2}u^{-\frac{3}{2}}<0$; funkcja wklęsła na [0,$\infty )$

Ad (**c**) $\lim\_{u\to 0+}\frac{d}{du}w\left(u\right)=\frac{15}{\sqrt{u}}=+\infty $.

**ZADANIE 6.** Wyprowadź wzór na elastyczność produkcji względem

1. kapitału
2. pracy

w liniowej funkcji produkcji

$$f\left(k,z\right)=ak+bz; a,b>0.$$

1. Wykaż, że przy $k\rightarrow \infty $ elastyczność produkcji względem kapitału zbliża się asymptotycznie do 1. Podobnie, przy $z\rightarrow \infty $ elastyczność produkcji względem nakładów pracy zbliża się asymptotycznie do 1.

***Rozwiązanie***

Ad (**a**) $ε\_{k}^{f}=\frac{∂f}{∂k}∙\frac{k}{f}=\frac{a∙k}{ak+bz}$

Ad (**b**) $ε\_{z}^{f}=\frac{∂f}{∂z}∙\frac{z}{f}=\frac{b∙z}{ak+bz}$

Ad (**c)** $\lim\_{k\to \infty }ε\_{k}^{f}=\lim\_{k\to \infty }\frac{a∙k}{ak+bz}=\lim\_{k\to \infty }\frac{1}{1+\frac{bz}{a∙k}}=$1; podobnie $\lim\_{z\to \infty }ε\_{z}^{f}=\lim\_{k\to \infty }\frac{bz}{ak+bz}=\lim\_{k\to \infty }\frac{1}{\frac{ak}{bz}+1}=1.$

**ZADANIE 7.** Wyprowadź wzór na elastyczność substytucji

1. kapitału przez pracę
2. pracy przez kapitał

w liniowej funkcji produkcji

$$f\left(k,z\right)=ak+bz; a,b>0.$$

1. Kiedy (dla jakich $k, z)$ obie elastyczności substytucji są sobie równe?

***Rozwiązanie***

Ad (**a**) $ε\_{kz}^{f}=\left(\frac{∂f}{∂k}:\frac{∂f}{∂z}\right)∙\frac{k}{z}=\frac{a}{b}.\frac{k}{z}=\frac{ak}{bz}$

 Ad (**b**) $ε\_{zk}^{f}=\left(\frac{∂f}{∂z}:\frac{∂f}{∂k}\right)∙\frac{z}{k}=\frac{b}{a}∙\frac{z}{k}=\frac{bz}{ak}$

 Ad (**c**) $ε\_{kz}^{f}=$ $ε\_{zk}^{f}⇒\frac{ak}{bz}=\frac{bz}{ak}⇒a^{2}k^{2}=b^{2}z^{2}⟹ak=bz⟺\frac{k}{z}=\frac{b}{a}.$

Ponieważ $\frac{k}{z}=u$ jest technicznym uzbrojeniem pracy, więc w liniowej funkcji produkcji elastyczności substytucji czynników , tj. kapitału i pracy, są sobie równe gdy t.u.p. stabilizuje się na poziomie $\overbar{u}=\frac{b}{a}$.

**ZADANIE 8.** Czy liniowa funkcja produkcji $f\left(k,z\right)=ak+bz $ spełnia warunek proporcjonalności przychodów?

**Odp.** Tak, gdyż$f\left(λk,λz\right)=a\left(λk\right)+b\left(λz\right)=λak+λbz=λ\left(ak+bz \right)= λ$ $f\left(k,z\right)$.

**ZADANIE 9.** Wyprowadź wzór na izokwantę liniowej funkcji produkcji:

$$f\left(k,z\right)=ak+bz; a,b>0,$$

przechodzącej przez punkt $k^{0},z^{0}>0$. Sporządź wykres.

***Rozwiązanie***

$$f\left(k,z\right)=ak+bz= f\left(k^{0},z^{0}\right)=ak^{0}+bz^{0} $$

czyli:

$ak= ak^{0}+bz^{0} –bz$,

zatem ostatecznie:

$k\left(z\right)=C-\frac{b}{a}z$,

gdzie $C=k^{0}+\frac{b}{a}z^{0}>0.$